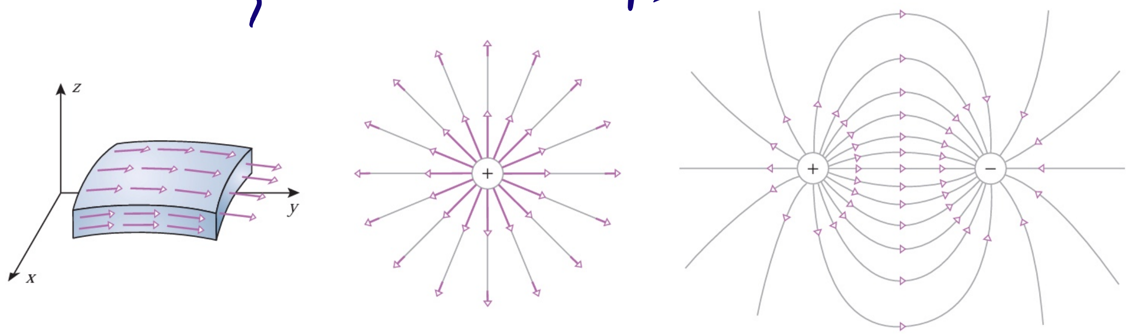
## 4.5 ปริพันธ์ตามพื้นผิวของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ : ฟลักซ์

ในหัวข้อนี้เราจะให้ความสนใจกับสนามเวกเตอร์ (vector field) ในปริภูมิ 3D ที่เกี่ยวข้องกับการไหล (flow) เช่น การไหลของของเหลว การไหลของประจุในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า เป็นต้น

เนื่องจากจุดมุ่งหมายหลักของเราคือศึกษาการไหลของสนามเวกเตอร์ผ่านพื้นผิว (surface) เราจึงจำเป็นต้องรู้จักลักษณะพื้นฐานของพื้นผิวก่อน สำหรับพื้นผิวส่วนใหญ่เราจะพบว่า พื้นผิวมักจะมีสองด้าน เช่น ทรงกลม (sphere) จะมีด้านใน (inside) และด้านนอก (outside) หรือ ระนาบ $z=c$ ในปริภูมิ 3D จะมีด้านบน (top side) และด้านล่าง (bottom side) เสมอ อย่างไรก็ตาม ในทางคณิตศาสตร์ยังมีพื้นผิวบางอย่างที่มีเพียงด้านเดียวเสมอ ซึ่งเรารู้จักกันในชื่อ แถบของโมเบียส (Möbius strip)




The velocity vectors of the fluid particles are tangent to the streamlines.

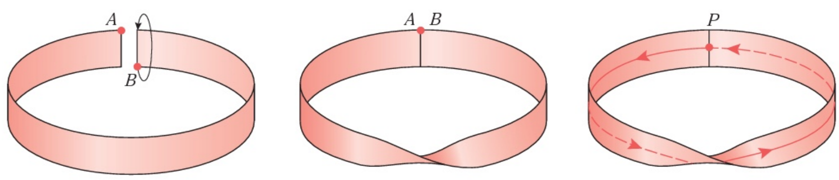
By Coulomb's law the electrostatic field resulting from a single positive charge is an inverse-square field in which **F** is the repulsive force on a small unit positive charge.

The electrostatic field **F** that results from two charges of equal strength but opposite polarity.

(*a*) (*b*) (*c*)

**Figure 15.6.1**

If a bug starts at $P$ with its back facing you and makes one circuit around the strip, then its back will face away from you when it returns to $P$.

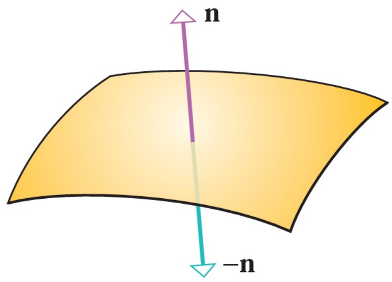



(*a*) (*b*)

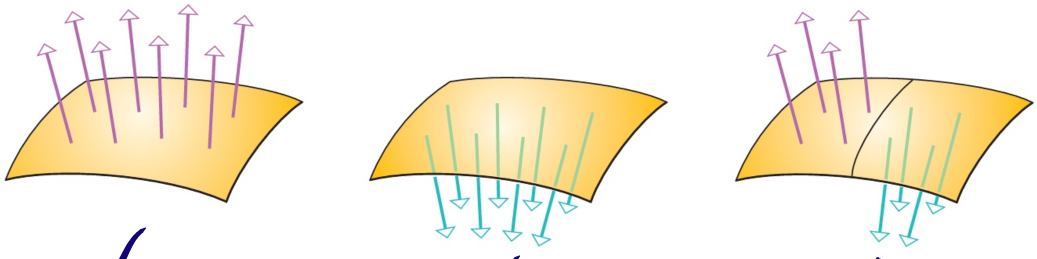
ในที่นี้เราจะเรียกพื้นผิวที่มีสองด้านว่า "พื้นผิวมีทิศทาง" (orientable) และจะเรียกพื้นผิวที่มีด้านเดียวว่า พื้นผิวไม่มีทิศทาง (non orientable)

ในการประยุกต์ใช้นั้น เรามักจะพยายามหาทิศทางของพื้นผิวมีทิศทาง นั่นคือ ในที่นี้เราจะสมมติให้ $\sigma$ เป็นพื้นผิวมีทิศทาง ที่แต่ละจุดบน $\sigma$ จะสามารถหาเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย (unit normal vector) $\mathbf{n}$ ได้เสมอ

ตัวอย่างเช่นในภาพนี้ จะเห็นว่า เวกเตอร์ $\mathbf{n}$ และเวกเตอร์ $-\mathbf{n}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงกันข้ามกัน




! ทั้งนี้ สำหรับพื้นผิวมีทิศทางปรับเรียบใดๆ เราสามารถหาทิศทางของเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยที่แต่ละจุดได้เสมอ นอกจากนี้ สำหรับพื้นผิวมีทิศทางปรับเรียบใดๆ นั้น เราจะสามารถหาทิศทางของเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยได้สองทิศทางเท่านั้น



✓ ✓ ✗

ฟลักซ์:

ในทางฟิสิกส์ เราจะใช้คำว่า "ของไหล" (fluid) แทนทั้งของเหลว (liquid) และก๊าซ (gas)

เราพบว่าของเหลวจะมีลักษณะอัดไม่ได้ (incompressible) กล่าวคือ เราไม่สามารถเปลี่ยนความหนาแน่นของของเหลวได้โดยการบีบอัดได้ แต่ก๊าซนั้นมีลักษณะอัดได้ (compressible) กล่าวคือ ความหนาแน่นของก๊าซจะเปลี่ยนถ้าเราเปลี่ยน (เพิ่ม/ลด) การบีบอัดในแต่ละจุดนั้นเอง

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาเฉพาะของไหลที่มีลักษณะบีบอัดไม่ได้เท่านั้น

ทบทวนอีกครั้ง ในหัวข้อนี้ เราต้องการศึกษาสมบัติพื้นฐานทางฟิสิกส์ที่เรียกว่า ฟลักซ์ (flux) สำหรับคำว่าฟลักซ์มีที่มาจากภาษาละตินที่ว่า fluxus ซึ่งหมายความว่า การไหล (flowing)

ลองจินตนาการว่าของไหลชนิดหนึ่งไหลแบบอิสระผ่านพื้นผิวที่ไหลผ่านได้ (permable surface) จากด้านหนึ่งของพื้นผิวไปยังอีกด้านหนึ่ง (เพราะมีสองด้านไง!) แน่นอนว่าเราจะสามารถจินตนาการได้ว่า ฟลักซ์ คือ

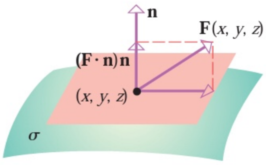
"ปริมาตรของของไหลผ่านพื้นผิวในหนึ่งหน่วยเวลา"
(The volume of fluid that passes through the surface in one unit of time)

These ideas lead us to the following problem.

**15.6.1 PROBLEM** Suppose that an oriented surface $\sigma$ is immersed in an incompressible, steady-state fluid flow and that the surface is permeable so that the fluid can flow through it freely in either direction. Find the net volume of fluid $\Phi$ that passes through the surface per unit of time, where the net volume is interpreted to mean the volume that passes through the surface in the positive direction minus the volume that passes through the surface in the negative direction.

To solve this problem, suppose that the velocity of the fluid at a point $(x, y, z)$ on the surface $\sigma$ is given by

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$



▲ Figure 15.6.7

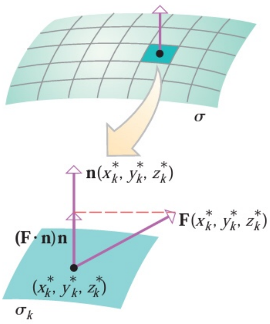
Let $\mathbf{n}$ be the unit normal toward the positive side of $\sigma$ at the point $(x, y, z)$. As illustrated in Figure 15.6.7, the velocity vector $\mathbf{F}$ can be resolved into two orthogonal components—a component $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ that is perpendicular to the surface $\sigma$ and a second component that is along the "face" of $\sigma$. The component of velocity along the face of the surface does not contribute to the flow through $\sigma$ and hence can be ignored in our computations. Moreover, observe that the sign of $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ determines the direction of flow—a positive value means the flow is in the direction of $\mathbf{n}$ and a negative value means that it is opposite to $\mathbf{n}$.

To solve Problem 15.6.1, we subdivide $\sigma$ into $n$ patches $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ with areas

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$$

If the patches are small and the flow is not too erratic, it is reasonable to assume that the velocity does not vary much on each patch. Thus, if $(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ is any point in the $k$th patch, we can assume that $\mathbf{F}(x, y, z)$ is constant and equal to $\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ throughout the patch and that the component of velocity across the surface $\sigma_k$ is

$$\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \tag{2}$$



▲ Figure 15.6.8

(Figure 15.6.8). Thus, we can interpret

$$\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$

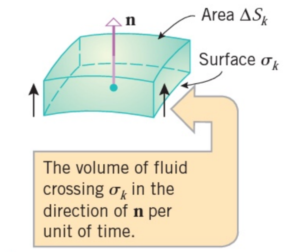
as the approximate volume of fluid crossing the patch $\sigma_k$ in the direction of $\mathbf{n}$ per unit of time (Figure 15.6.9). For example, if the component of velocity in the direction of $\mathbf{n}$ is $\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n} = 25$ cm/s, and the area of the patch is $\Delta S_k = 2$ cm$^2$, then the volume of fluid $\Delta V_k$ crossing the patch in the direction of $\mathbf{n}$ per unit of time is approximately

$$\Delta V_k \approx \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k = 25 \text{ cm/s} \cdot 2 \text{ cm}^2 = 50 \text{ cm}^3/\text{s}$$

In the case where the velocity component $\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ is negative, the flow is in the direction opposite to $\mathbf{n}$, so that $-\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$ is the approximate volume of fluid crossing the patch $\sigma_k$ in the direction opposite to $\mathbf{n}$ per unit time. Thus, the sum

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$

measures the approximate net volume of fluid that crosses the surface $\sigma$ in the direction of its orientation $\mathbf{n}$ per unit of time.




▲ **Figure 15.6.9**

If we now increase $n$ in such a way that the maximum dimension of each patch approaches zero, then it is plausible that the errors in the approximations approach zero, and the limit

$$\Phi = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta S_k \tag{3}$$

represents the exact net volume of fluid that crosses the surface $\sigma$ in the direction of its orientation **n** per unit of time. The quantity $\Phi$ defined by Equation (3) is called the ***flux of F across σ***. The flux can also be expressed as the surface integral

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)\, dS \tag{4}$$

ปริพันธ์ฟลักซ์

If the fluid has mass density $\delta$, then $\Phi\delta$ (volume/time $\times$ density) represents the net mass of fluid that passes through $\sigma$ per unit of time.

A positive flux means that in one unit of time a greater volume of fluid passes through $\sigma$ in the positive direction than in the negative direction, a negative flux means that a greater volume passes through the surface in the negative direction than in the positive direction, and a zero flux means that the same volume passes through the surface in each direction. Integrals of form (4) arise in other contexts as well and are called ***flux integrals***.

โจทย์! กำหนดให้ $\sigma$ เป็นพื้นผิว มีทิศทาง และสมมติให้ความเร็ว ของการไหลของของไหลที่ผ่าน $\sigma$ ณ จุด $(x,y,z)$ บน $\sigma$ ถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน

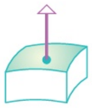
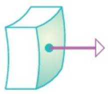
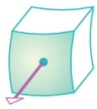
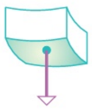
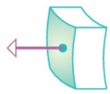
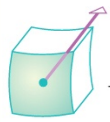
$$\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$$

และให้ $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x,y,z)$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเป็นบวก และถ้า ปริมาตรของของไหลที่ไหลผ่านพื้นผิว $\sigma$ ในทิศทางของ $\mathbf{n}$ ในหนึ่งหน่วยเวลา เขียนแทนด้วย $\Phi$ และหาได้จาก

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

ซึ่งเราเรียก $\Phi$ ว่า "ฟลักซ์ของ $\mathbf{F}$ ที่ผ่าน $\sigma$" (flux of $\mathbf{F}$ across $\sigma$) และเราเรียกการหาปริพันธ์นี้ว่า "ปริพันธ์ฟลักซ์"

สมมติว่าพื้นผิว $\sigma$ สามารถเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชัน $z=g(x,y)$
$y=g(x,z)$ หรือ $x=g(y,z)$ ได้ เราสามารถคำนวณเวกเตอร์
แนวฉากหนึ่งหน่วย $\mathbf{n}$ ณ จุด $(x,y,z)$ ได้ดังนี้

| $z = g(x, y)$ | | $y = g(z, x)$ | | $x = g(y, z)$ | |
|---|---|---|---|---|---|
|  Positive **k**-component | $\mathbf{n} = \dfrac{-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$ Positive orientation |  Positive **j**-component | $\mathbf{n} = \dfrac{-\frac{\partial y}{\partial x}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{\partial y}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ Positive orientation |  Positive **i**-component | $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{i} - \frac{\partial x}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial x}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ Positive orientation |
|  Negative **k**-component | $-\mathbf{n} = \dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$ Negative orientation |  Negative **j**-component | $-\mathbf{n} = \dfrac{\frac{\partial y}{\partial x}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{\partial y}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ Negative orientation |  Negative **i**-component | $-\mathbf{n} = \dfrac{-\mathbf{i} + \frac{\partial x}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial x}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ Negative orientation |

สำหรับฟังก์ชันที่สามารถเขียนอยู่ในรูปข้างต้นได้ เราสามารถคำนวณ
ฟลักซ์ของ $\mathbb{F}$ ที่ผ่าน $\sigma$ ได้โดยทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบท</u>:
- ให้ $\sigma$ เป็นพื้นผิวปรับเรียบที่อยู่ในรูป $z=g(x,y)$, $y=g(x,z)$ หรือ $x=g(y,z)$
- ให้ $\mathbb{F}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่ฟังก์ชันส่วนประกอบมีความต่อเนื่องบน $\sigma$

สมมติให้ ฟังก์ชัน $G(x,y,z)=0$ โดยที่ $\begin{cases} G := z-g(x,y) \\ G := y-g(x,z) \\ G := x-g(y,z) \end{cases}$
และ $R$ เป็นบริเวณ (region) ที่เป็นภาพฉายของ $\sigma$ ไปยังระนาบตัวแปรต้นของ $g$

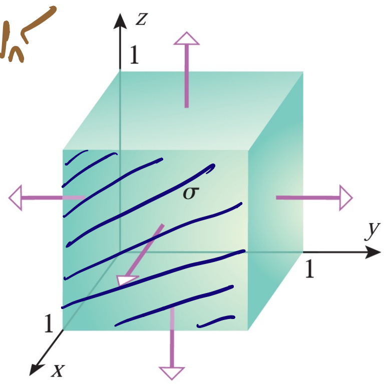
ถ้า $\sigma$ มีทิศทางเป็นบวก [พื้น ($z$), ขวา ($y$), หน้า ($x$)] แล้ว

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{R} \mathbf{F}\cdot \nabla G\, dA$$

**ตัวอย่าง** : สมมติให้ $\sigma$ เป็นพื้นผิวของลูกบาศก์ในปริภูมิ 3D และมีทิศทางออก (outward) ดังภาพ จงหาฟลักซ์ของ

$$\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{j}$$

ที่ผ่านด้านของพื้นผิวต่อไปนี้




(1) หน้าระนาบ $x=1$

(2) หน้าระนาบ $x=0$

(3) หน้าระนาบ $y=1$

(4) หน้าระนาบ $y=0$

(5) หน้าระนาบ $z=1$

(6) หน้าระนาบ $z=0$

**วิธีทำ** ① คำนวณฟลักซ์ของ $\mathbf{F}$ ที่ผ่าน $\sigma$ โดย

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{R} \mathbf{F}\cdot \nabla G\, dA$$

✓ ✓ ?

**ข้อที่ 1**: พิจารณาสมการพื้นผิวของ $\sigma$ และสร้างฟังก์ชัน $G$

จาก $\sigma$ คือหน้าระนาบ $x = \underbrace{1}_{g(y,z)} \Rightarrow G(x,y,z) = x-1$

ขั้นที่ 2: หา $\nabla G$ และคำนวณ $\mathbb{F}\cdot\nabla G$

จาก $G(x,y,z) = x-1$

$$\Rightarrow \nabla G = \frac{\partial G}{\partial x} i + \frac{\partial G}{\partial y} j + \frac{\partial G}{\partial z} k = i + 0\cdot j + 0\cdot k = i$$

ขั้นที่ 3: หาขอบเขต R และคำนวณค่าปริพันธ์

จาก R คือภาพฉายของ $\sigma$ (บนระนาบ $x=1$) จะได้ว่า

R คือ $0 \le y \le 1$ และ $0 \le z \le 1$

เพราะฉะนั้น

$$\iint_\sigma \mathbb{F}\cdot n\,dS = \iint_R \mathbb{F}\cdot(\nabla G)\,dA$$

$$= \int_{z=0}^{1}\int_{y=0}^{y=1} (zj)\cdot(i)\,dy\,dz = \int_{z=0}^{z=1}\int_{y=0}^{y=1} 0\,dy\,dz$$

$$= 0$$

② จากสมการของ $\sigma$ คือ $x=0 \Rightarrow G(x,y,z) = x$

$$\Rightarrow (-\nabla G) = \frac{\partial x}{\partial x} i + \frac{\partial x}{\partial y} j + \frac{\partial x}{\partial z} k = (-i)$$

$$\Rightarrow \mathbb{F}\cdot\nabla G = (zj)\cdot(-i) = 0$$

$$\Rightarrow \iint_\sigma \mathbb{F}\cdot n\,dS = \iint_R \mathbb{F}\cdot\nabla G\,dA = 0$$

③ จากสมการของ $\sigma$ คือ $y=1 \Rightarrow G(x,y,z) = y-1$

$$\Rightarrow \nabla G = \frac{\partial (y-1)}{\partial x} i + \frac{\partial (y-1)}{\partial y} j + \frac{\partial (y-1)}{\partial z} k = j$$

$$\Rightarrow \mathbb{F}\cdot\nabla G = (zj)\cdot j = z$$

มีภาพฉายบนระนาบของ R: $0 \le x \le 1$ และ $0 \le z \le 1$

เพราะฉะนั้น

$$\iint_{\sigma} \mathbb{F} \cdot n \, dS = \iint_{R} \mathbb{F} \cdot \nabla G \, dA$$

$$= \int_{z=0}^{z=1} \int_{x=0}^{x=1} z \, dx \, dz = \oplus$$

④ จากสมการของ $\sigma$ คือ $y = 0 \Rightarrow G(x, y, z) = y$

$\Rightarrow (-\nabla G) = -j$

$\rightarrow \mathbb{F} \cdot \nabla G = (zj) \cdot j = z$

มีภาพฉายบนระนาบของ R: $0 \le x \le 1$ และ $0 \le z \le 1$

เพราะฉะนั้น

ติดลบเพราะทิศทางลบ

$$\iint_{\sigma} \mathbb{F} \cdot n \, dS = \iint_{R} \mathbb{F} \cdot (-\nabla G) \, dA$$

$$= \int_{z=0}^{z=1} \int_{x=0}^{x=1} (-z) \, dx \, dz = \ominus$$

ตัวอย่าง. จงหาฟลักซ์ของ $F(x,y,z) = 5z\,i + y\,j + 2x\,k$ ที่ผ่านพื้นผิว $S$ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$ บนระนาบ $z = 1$

(1) กำหนดทิศทางโดยเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยด้านบน

(2) กำหนดทิศทางโดยเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยด้านล่าง

ตัวอย่าง: สมมติว่า $\sigma$ เป็นพื้นผิวที่เป็นส่วนของพื้นผิว $z = 1 - x^2 - y^2$ ซึ่งอยู่บนระนาบ XY สมมติว่า $\sigma$ มีทิศทางตามเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยด้านบน จงหาฟลักซ์ของ

$$\mathbb{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

ที่ผ่านพื้นผิว $\sigma$

แบบฝึกหัด

2. Find the flux of the constant vector field $\mathbf{F}(x, y, z) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ across the entire surface $\sigma$ in Figure Ex-1. Explain your reasoning.

3. Find the flux of $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i}$ through a square of side 4 in the plane $x = -5$ oriented in the positive $x$-direction.

4. Find the flux of $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + 1)\mathbf{j}$ through a square of side 5 in the $xz$-plane oriented in the negative $y$-direction.

5. Find the flux of $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z^2 + 4)\mathbf{k}$ through a $2 \times 3$ rectangle in the plane $z = 1$ oriented in the positive $z$-direction.

6. Find the flux of $\mathbf{F}(x, y, z) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ through a disk of radius 5 in the plane $y = 3$ oriented in the direction of increasing $y$.

7. Find the flux of $\mathbf{F}(x, y, z) = 9\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ through a disk of radius 5 in the plane $z = 2$ oriented in the upward direction.

8. Let $\sigma$ be the cylindrical surface that is represented by the vector-valued function $\mathbf{r}(u, v) = \cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$ with $0 \le u \le 1$ and $0 \le v \le 2\pi$.
   (a) Find the unit normal $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v)$ that defines the positive orientation of $\sigma$.
   (b) Is the positive orientation inward or outward? Justify your answer.

**9–16** Find the flux of the vector field $\mathbf{F}$ across $\sigma$. ■

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{k}$; $\sigma$ is the square $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$ in the $xy$-plane, oriented in the upward direction.

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$; $\sigma$ is the rectangle $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$ in the plane $z = 2$, oriented in the positive $z$-direction.

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; $\sigma$ is the portion of the surface $z = 1 - x^2 - y^2$ above the $xy$-plane, oriented by upward normals.

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + (x + e^y)\mathbf{j} - \mathbf{k}$; $\sigma$ is the vertical rectangle $0 \le x \le 2, 0 \le z \le 4$ in the plane $y = -1$, oriented in the negative $y$-direction.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; $\sigma$ is the portion of the cone $z^2 = x^2 + y^2$ between the planes $z = 1$ and $z = 2$, oriented by upward unit normals.

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\sigma$ is the portion of the paraboloid $z = x^2 + y^2$ below the plane $z = 4$, oriented by downward unit normals.

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{k}$; the surface $\sigma$ is the portion of the paraboloid $z = x^2 + y^2$ below the plane $z = y$, oriented by downward unit normals.

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + yx\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$; $\sigma$ is the portion of the plane $6x + 3y + 2z = 6$ in the first octant, oriented by unit normals with positive components.

**17–20** Find the flux of the vector field $\mathbf{F}$ across $\sigma$ in the direction of positive orientation. ■

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\sigma$ is the portion of the paraboloid
$$\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\mathbf{i} + u\sin v\mathbf{j} + (1 - u^2)\mathbf{k}$$
with $1 \le u \le 2, 0 \le v \le 2\pi$.

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-y}\mathbf{i} - y\mathbf{j} + x\sin z\mathbf{k}$; $\sigma$ is the portion of the elliptic cylinder
$$\mathbf{r}(u, v) = 2\cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$
with $0 \le u \le 5, 0 \le v \le 2\pi$.

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}$; $\sigma$ is the portion of the cone
$$\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\mathbf{i} + u\sin v\mathbf{j} + 2u\mathbf{k}$$
with $0 \le u \le \sin v, 0 \le v \le \pi$.

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $\sigma$ is the portion of the sphere
$$\mathbf{r}(u, v) = 2\sin u\cos v\mathbf{i} + 2\sin u\sin v\mathbf{j} + 2\cos u\mathbf{k}$$
with $0 \le u \le \pi/3, 0 \le v \le 2\pi$.

21. Let $\sigma$ be the surface of the cube bounded by the planes $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$, oriented by outward unit normals. In each part, find the flux of $\mathbf{F}$ across $\sigma$.
   (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i}$
   (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
   (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

22. Let $\sigma$ be the closed surface consisting of the portion of the paraboloid $z = x^2 + y^2$ for which $0 \le z \le 1$ and capped by the disk $x^2 + y^2 \le 1$ in the plane $z = 1$. Find the flux of the vector field $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ in the outward direction across $\sigma$.

**23–26 True–False** Determine whether the statement is true or false. Explain your answer. ■

23. The Möbius strip is a surface that has two orientations.

24. The flux of a vector field is another vector field.

25. If the net volume of fluid that passes through a surface per unit time in the positive direction is zero, then the velocity of the fluid is everywhere tangent to the surface.

26. If a surface $\sigma$ is oriented by a unit normal vector field $\mathbf{n}$, the flux of $\mathbf{n}$ across $\sigma$ is numerically equal to the surface area of $\sigma$.

**27–28** Find the flux of $\mathbf{F}$ across the surface $\sigma$ by expressing $\sigma$ parametrically. ■

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$; the surface $\sigma$ is the portion of the cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ between the planes $z = 1$ and $z = 2$, oriented by downward unit normals.

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $\sigma$ is the portion of the cylinder $x^2 + y^2 = 16$ between the planes $z = -2$ and $z = 2$, oriented by outward unit normals.

29. Let $x$, $y$, and $z$ be measured in meters, and suppose that $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ is the velocity vector (in m/s) of a fluid particle at the point $(x, y, z)$ in a steady-state incompressible fluid flow.
   (a) Find the net volume of fluid that passes in the upward direction through the portion of the plane $x + y + z = 1$ in the first octant in 1 s.

(cont.)

(b) Assuming that the fluid has a mass density of 806 $kg/m^3$, find the net mass of fluid that passes in the upward direction through the surface in part (a) in 1 s.

**30.** Let $x$, $y$, and $z$ be measured in meters, and suppose that $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + 3x\mathbf{k}$ is the velocity vector (in m/s) of a fluid particle at the point $(x, y, z)$ in a steady-state incompressible fluid flow.

(a) Find the net volume of fluid that passes in the upward direction through the hemisphere $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ in 1 s.

(b) Assuming that the fluid has a mass density of 1060 $kg/m^3$, find the net mass of fluid that passes in the upward direction through the surface in part (a) in 1 s.

**31.** (a) Derive the analogs of Formulas (12) and (13) for surfaces of the form $x = g(y, z)$.

(b) Let $\sigma$ be the portion of the paraboloid $x = y^2 + z^2$ for $x \leq 1$ and $z \geq 0$ oriented by unit normals with negative $x$-components. Use the result in part (a) to find the flux of

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

across $\sigma$.

**32.** (a) Derive the analogs of Formulas (12) and (13) for surfaces of the form $y = g(z, x)$.

(b) Let $\sigma$ be the portion of the paraboloid $y = z^2 + x^2$ for $y \leq 1$ and $z \geq 0$ oriented by unit normals with positive $y$-components. Use the result in part (a) to find the flux of

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

across $\sigma$.

**33.** Let $\mathbf{F} = \|\mathbf{r}\|^k\mathbf{r}$, where $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ and $k$ is a constant. (Note that if $k = -3$, this is an inverse-square field.) Let $\sigma$ be the sphere of radius $a$ centered at the origin and oriented by the outward normal $\mathbf{n} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\| = \mathbf{r}/a$.

(a) Find the flux of $\mathbf{F}$ across $\sigma$ without performing any integrations. [*Hint:* The surface area of a sphere of radius $a$ is $4\pi a^2$.]

(b) For what value of $k$ is the flux independent of the radius of the sphere?

C **34.** Let

$$\mathbf{F}(x, y, z) = a^2x\mathbf{i} + (y/a)\mathbf{j} + az^2\mathbf{k}$$

and let $\sigma$ be the sphere of radius 1 centered at the origin and oriented outward. Use a CAS to find all values of $a$ such that the flux of $\mathbf{F}$ across $\sigma$ is $3\pi$.

C **35.** Let

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{6}{a} + 1\right)x\mathbf{i} - 4ay\mathbf{j} + a^2z\mathbf{k}$$

and let $\sigma$ be the sphere of radius $a$ centered at the origin and oriented outward. Use a CAS to find all values of $a$ such that the flux of $\mathbf{F}$ across $\sigma$ is zero.

**36. Writing** Discuss the similarities and differences between the flux of a vector field across a surface and the line integral of a vector field along a curve.

**37. Writing** Write a paragraph explaining the concept of flux to someone unfamiliar with its meaning.