บทที่ 4 Vector Calculus

4.1 Line Integral.

ปริพันธ์ตามเส้นบนเส้นโค้งในสองมิติ มีนิยามดังนี้

นิยาม 4.1.1 กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบในสองมิติ มีสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \le t \le b)$$

และให้ $f(x,y)$ และ $g(x,y)$ ต่อเนื่องบนบริเวณเปิดที่บรรจุเส้นโค้ง C จะกำหนด

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)dt$$

$$\int_C g(x,y)dy = \int_a^b g(x(t), y(t))y'(t)dt$$

สัญลักษณ์ $\int_C f(x,y)dx$ เรียกว่าปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ f บนเส้นโค้ง C เทียบกับ x และ $\int_C g(x,y)dy$ เรียกว่าปริพันธ์ตามเส้นของ g บนเส้นโค้ง C เทียบกับ y

ข้อสังเกต ในหาค่าปริพันธ์ตามเส้น $\int_C f(x,y)dx$ และ $\int_C g(x,y)dy$ คำนวณหาค่าได้โดยการแทนค่า x และ y ในเทอมของ t แล้วแทน $dx = x'(t)dt$ และ $dy = y'(t)dt$ จากนั้นก็หาค่าปริพันธ์ตามปกติบนช่วง $a \le t \le b$

โดยทั่วไปในการหาค่าปริพันธ์ตามเส้นจะเป็นแบบผสมกัน ซึ่งจะทำได้ดังนี้

$$\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_C f(x,y)dx + \int_C g(x,y)dy$$

เรียกประพจน์ $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ ว่ารูปแบบเชิงอนุพันธ์

ตัวช่วย!

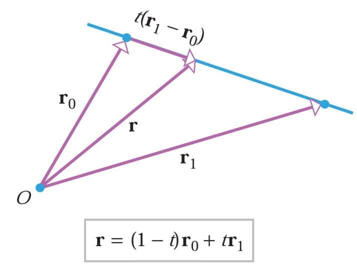


Figure 12.1.9

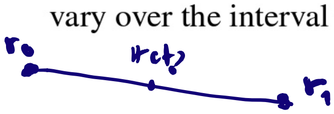
In particular, if $\mathbf{r}_0$ and $\mathbf{r}_1$ are vectors in 2-space or 3-space with their initial points at the origin, then the line that passes through the terminal points of these vectors can be expressed in vector form as

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \qquad \text{or} \qquad \mathbf{r} = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \tag{6–7}$$

as indicated in Figure 12.1.9.

It is common to call either (6) or (7) the ***two-point vector form of a line*** and to say, for simplicity, that the line passes through the *points* $\mathbf{r}_0$ and $\mathbf{r}_1$ (as opposed to saying that it passes through the *terminal points* of $\mathbf{r}_0$ and $\mathbf{r}_1$).

It is understood in (6) and (7) that t varies from $-\infty$ to $+\infty$. However, if we restrict t to vary over the interval $0 \le t \le 1$, then $\mathbf{r}$ will vary from $\mathbf{r}_0$ to $\mathbf{r}_1$. Thus, the equation



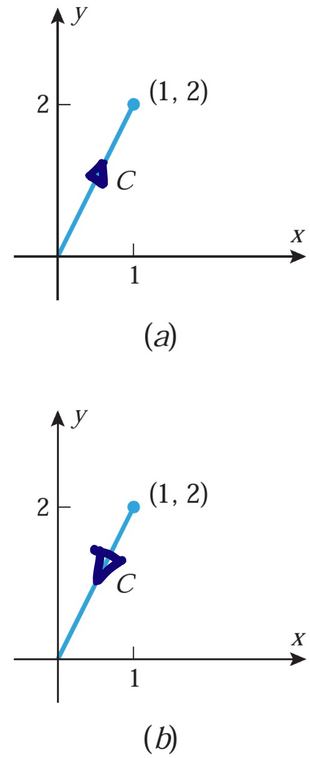
$$\mathbf{r} = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad (0 \le t \le 1) \tag{8}$$

represents the line segment in 2-space or 3-space that is traced from $\mathbf{r}_0$ to $\mathbf{r}_1$.

▶ **Example 5** Evaluate $\int_C 3xy\,dy$, where C is the line segment joining $(0, 0)$ and $(1, 2)$ with the given orientation.

(a) Oriented from $(0, 0)$ to $(1, 2)$ as in Figure 15.2.6a.

(b) Oriented from $(1, 2)$ to $(0, 0)$ as in Figure 15.2.6b.



▲ **Figure 15.2.6**

(a) พิจารณาเวกเตอร์ตำแหน่งระหว่างจุด (0,0) ไปยัง (1,2) คือ

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)(0\cdot i + 0\cdot j) + t(i+2j)\ ;\ 0 \le t \le 1$$
$$= \underbrace{t}_{x(t)}\,i + \underbrace{2t}_{y(t)}\,j \qquad 0 \le t \le 1$$

ดังนั้น

$$\int_C 3xy\,dy = \int_{t=0}^{t=1} 3x(t)y(t)y'(t)\,dt$$
$$= \int_{t=0}^{t=1} 3(t)(2t)(2)\,dt$$
$$= 12\frac{t^3}{3}\Big|_{t=0}^{t=1} = 4t^3\Big|_{t=0}^{t=1} = 4$$

$u = 1-t \Rightarrow u = (1-t)^2$

$\frac{du}{dt} = -1 \Rightarrow dt = \frac{du}{-1}$

$-12\int u^2 \frac{du}{-1} = 12\int u^2 du$

$= 12\frac{u^3}{3} = 4u^3$

$4(1-t)^3$

(b) พิจารณาเวกเตอร์ตำแหน่งของจุดใดๆ จาก (1,2) ไปยัง (0,0)

จะได้ $\mathbf{r}(t) = (1-t)(i+2j) + t(0\cdot i + 0\cdot j)\ ;\ 0 \le t \le 1$

$$= (1-t)i + (2-2t)j$$

$\Rightarrow x(t) = 1-t,\ y(t) = 2-2t\ ;\ 0 \le t \le 1$

พิจารณา

$$\int_C 3xy\,dy = \int_C 3x(t)y(t)y'(t)\,dt$$
$$= \int_{t=0}^{t=1} 3(1-t)(2-2t)(-2)\,dt = -12\int_{t=0}^{t=1} (1-t)^2\,dt = 4(1-t)^3\Big|_{t=0}^{t=1}$$

$= 4(1-1)^3 - 4(1-0)^3$

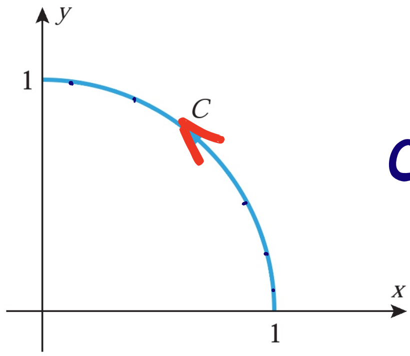
$= 0 - 4$

$= -4$

ตัวอย่าง 4.1.1 จงหาค่า

$$\int_C 2xy\,dx + \left(x^2+y^2\right)dy$$

บนเส้นโค้งของวงกลม C ที่กำหนดโดย $\underbrace{x=\cos t}_{x(t)},\ \underbrace{y=\sin t}_{y(t)}$ สำหรับ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$



$x = \cos t,\ y = \sin t\ (0 \le t \le \pi/2)$

$$\int_C 2xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy = \underbrace{\int_C 2xy\,dx}_{①} + \underbrace{\int_C (x^2+y^2)\,dy}_{②}$$

① ; $\displaystyle\int_C 2xy\,dx = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} 2x(t)\,y(t)\,x'(t)\,dt$

$$= \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sin t(-\sin t)\,dt$$

$u = \sin t \Rightarrow \frac{du}{dt} = \cos t \Rightarrow dt = \frac{\cos t}{du}$

$= \int \cos t \sin^2 t\,dt = \int u^2\,du$

$= \frac{u^3}{3}$

$$= -2\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^2 t\,dt = -\frac{2}{3}\sin^3 t\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\sin^3\frac{\pi}{2} - \sin^3 0\right) = -\frac{2}{3}$$

② $\displaystyle\int_C (x^2+y^2)\,dy = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \left(x^2(t) + y^2(t)\right) y'(t)\,dt$

$$= \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t + \sin^2 t)\cos t\,dt = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = \sin t\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}$$

$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0$

$= 1 - 0 = 1$

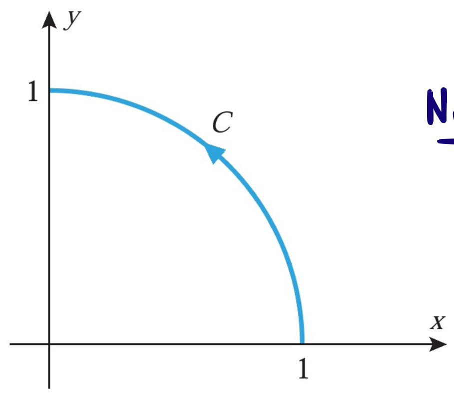
นั่นคือ $\displaystyle\int_C 2xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$

$\square$

▶ **Example 7** Evaluate

$$\int_C (3x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$$

along the circular arc C given by $x = \cos t$, $y = \sin t$ $(0 \le t \le \pi/2)$ (Figure 15.2.11).



$x = \cos t,\ y = \sin t\ (0 \le t \le \pi/2)$

Note! $$\int_C (3x^2+y^2)dx + 2xy\,dy = \underbrace{\int_C (3x^2+y^2)dx}_{①} + \underbrace{\int_C 2xy\,dy}_{②}$$

①; $$\int_C (3x^2+y^2)\,dx = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} (3x^2(t)+y^2(t))\,x'(t)\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} (3\cos^2 t + \sin^2 t)(-\sin t)\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} (2\cos^2 t + 1)(-\sin t)\,dt = \underbrace{-2\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t\,dt - \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt}_{①}$$

②; $$\int_C 2xy\,dy = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} 2x(t)\,y(t)\,y'(t)\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sin t(\cos t)\,dt = \underbrace{2\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t\,dt}_{②}$$

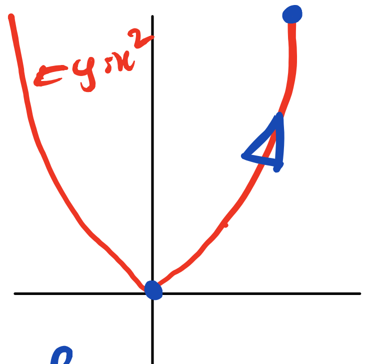
[illegible] $$\int_C (3x^2+y^2)dx + 2xy\,dy = ①+② = -\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = \cos t\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 0 - 1$$

$$= -1 \quad \square$$

* **ตัวอย่าง 4.1.2** จงหาค่า

$$\int_C \left(x^2+y\right)dx+\left(x^2+y\right)dy$$

บนเส้นโค้งของพาราโบลา $y=x^2$ จากจุด $(0,0)$ ไปยังจุด $(2,4)$



พิจารณาจากสมการพาราโบลา $y=x^2$
สามารถเขียนในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม (t) ได้เป็น

$$x(t)=t,\quad y(t)=t^2;\quad 0\leq t\leq 2$$

$$\int_C (x^2+y)\,dx+(x^2+y)\,dy=\int_{t=0}^{t=2}\left(x^2(t)+y(t)\right)x'(t)\,dt+\int_{t=0}^{t=2}\left(x^2(t)+y(t)\right)y'(t)\,dt$$

$$=\int_{t=0}^{t=2}(t^2+t^2)(1)\,dt+\int_{t=0}^{t=2}(t^2+t^2)(2t)\,dt$$

$$=2\int_{t=0}^{t=2}t^2\,dt+4\int_{t=0}^{t=2}t^3\,dt$$

$$=\frac{2t^3}{3}\Bigg|_{t=0}^{t=2}+4\frac{t^4}{4}\Bigg|_{t=0}^{t=2}$$

$$=\frac{2(2)^3}{3}-\frac{2(0)^3}{3}+(2)^4-(0)^4$$

$$=\frac{16}{3}+16$$

$\square$

<u>ความเป็นอิสระจากตัวแปรเสริม</u> เนื่องจากสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้งถูกใช้ในการคิดคำนวณหาค่าปริพันธ์ตามเส้นบนเส้นโค้งนั้น ดังนั้นอาจจะเป็นไปได้ที่สมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง C ที่แตกต่างกัน จะให้ค่าปริพันธ์ตามเส้นบนเส้นโค้ง C ที่ต่างกัน ทฤษฎีบทต่อไปนี้ซึ่งละเว้นการพิสูจน์จะให้ความชัดเจนในเรื่องนี้

<u>ทฤษฎีบท 4.1.1</u> ถ้า C เป็นเส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมเรียบ และถ้าเปลี่ยนตัวแปรเสริมแต่ไม่ทำให้เส้นโค้งเรียบตามตัวแปรเสริมใหม่เปลี่ยนทิศทาง แล้วสมการอิงตัวแปรเสริมทั้งสองจะให้ค่าปริพันธ์ตามเส้นโค้ง C มีค่าเดียวกัน

<u>ทฤษฎีบท 4.1.2</u> ถ้า C เป็นเส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมเรียบ และถ้าเปลี่ยนตัวแปรเสริมแล้วทำให้เส้นโค้งเรียบตามตัวแปรเสริมใหม่มีทิศทางตรงข้ามกับเส้นโค้งเดิม แล้วสมการอิงตัวแปรเสริมทั้งสองจะให้ค่าปริพันธ์ตามเส้นโค้ง C มีค่าเป็นลบของซึ่งกันและกัน

<u>ตัวอย่าง 4.1.3</u> จงหาค่า

(ฝึก!)

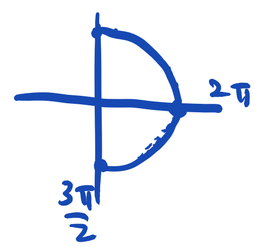
$$\int_C 2xy\,dx + \left(x^2 + y^2\right)dy$$

ตามเส้นโค้ง C ที่มีสมการอิงตัวแปรเสริมที่กำหนดให้

$(a)\quad x = \cos(2t),\quad y = \sin(2t)$ เมื่อ $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

$(b)\quad x = \cos(t^2),\quad y = \sin\left(t^2\right)$ เมื่อ $0 \le t \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

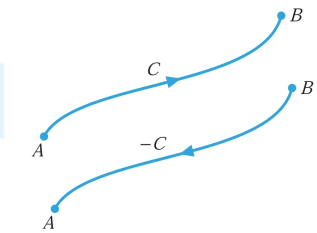
$(c)\quad x = \cos(-t),\quad y = \sin(-t)$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi$



$(d)\quad x = t,\quad y = \sqrt{1-t^2}$ เมื่อ $0 \le t \le 1$

ถ้าเส้นโค้ง C ซึ่งมีทิศทางที่แน่นอน แล้วเส้นโค้งเดียวกันแต่มีทิศทางตรงข้ามจะเขียนแทนด้วย $-C$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.2 จะได้ว่า

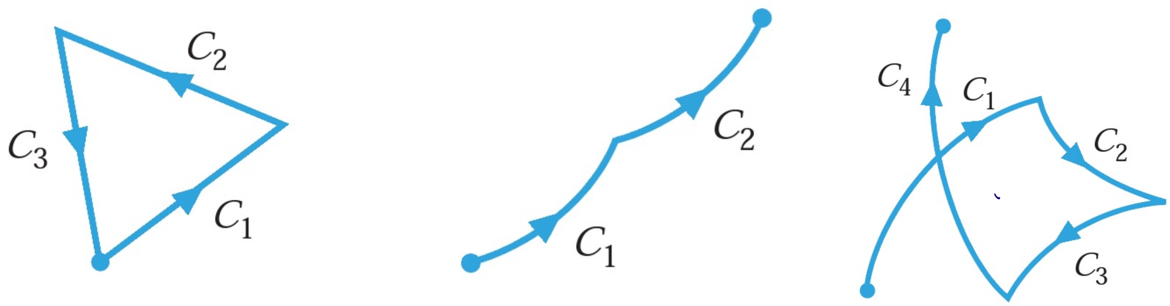
$$\int_{-C} f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = -\int_{C} f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy$$



▲ Figure 15.2.10

<u>ปริพันธ์ตามเส้นบนเส้นโค้งเรียบเป็นส่วนๆ</u> ในนิยามของปริพันธ์ตามเส้น เราต้องการเส้นโค้ง C เป็นเส้นโค้งเรียบ แต่อย่างไรก็ตามสามารถขยายนิยามไปยังเส้นโค้งที่อยู่ในรูปของเส้นโค้งเรียบจำนวนจำกัด $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ซึ่งมีปลายเชื่อมกัน เส้นโค้งลักษณะนี้เรียกว่า<u>เส้นโค้งเรียบเป็นส่วนๆ</u> (piecewise smooth) (ดูรูปที่ 18.1.2) จะนิยามปริพันธ์ตามเส้นบนเส้นโค้ง C เป็นผลบวกของปริพันธ์ตามเส้นบนแต่ละส่วนของเส้นโค้ง

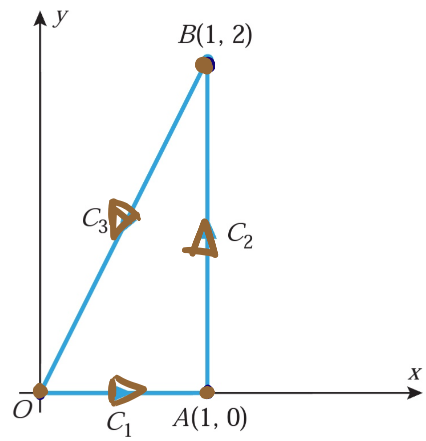
$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n}$$



▶ **Example 10** Evaluate

$$\int_C x^2y\,dx + x\,dy$$

where C is the triangular path shown in Figure 15.2.17.



วิธีทำ.

$$\int_C x^2y\,dx + x\,dy = \underbrace{\int_{C_1} x^2y\,dx + x\,dy}_{①} + \underbrace{\int_{C_2} x^2y\,dx + x\,dy}_{②} + \underbrace{\int_{C_3} x^2y\,dx + x\,dy}_{③}$$

①; C_1; $r(t) = (1-t)(0\cdot i + 0\cdot j) + t(i + 0\cdot j)$; $0 \le t \le 1$

$\Rightarrow r(t) = \underbrace{t}_{x(t)}i + \underbrace{0}_{y(t)}\cdot j$; $0 \le t \le 1$

$\Rightarrow x(t) = t,\ y(t) = 0,\ 0 \le t \le 1$

$$\Rightarrow \int_{C_1} x^2y\,dx + x\,dy = \int_{t=0}^{t=1} t^2 \cdot 0 \cdot 1\,dt + \int_{t=0}^{t=1} t \cdot 0 \cdot dt = 0$$

②; C_2; $r(t) = (1-t)(i + 0\cdot j) + t(i + 2j)$; $0 \le t \le 1$

$\Rightarrow r(t) = (1-t)i + ti + 2tj$

$= \underbrace{i}_{x(t)} + \underbrace{2t}_{y(t)}j$, $0 \le t \le 1$

$\Rightarrow$ ---

③; C_3; $r(t) = (1-t)(i + 2j) + t(0\cdot i + 0\cdot j)$; $0 \le t \le 1$

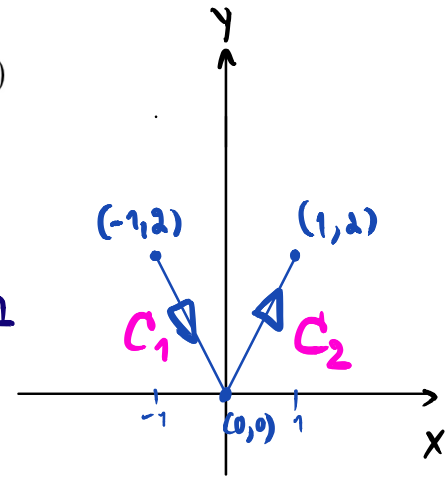
$= (1-t)i + (2-2t)j$; $0 \le t \le 1$ $\longrightarrow$

ตัวอย่าง 4.1.5 จงหาค่า

$x(t)$ $\quad$ $y(t)$

$$\int_C (x+y)^2\,dx + (x-y)^2\,dy$$

บนเส้นโค้ง C ซึ่งกำหนดโดย $y=|2x|$ จากจุด $(-1,2)$ ไปยังจุด $(1,2)$



วิธีทำ

พิจารณาดูเส้นทาง บน C_1;

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)(-i+2j) + t(0\cdot i + 0\cdot j) \;;\; 0\le t\le 1$$

$$= \underbrace{(t-1)}_{x(t)}\, i + \underbrace{(2-2t)}_{y(t)}\, j \;;\; 0\le t\le 1$$

พิจารณาดูเส้นทาง บน C_2;

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)(0\cdot i + 0\cdot j) + t(i+2j) \;;\; 0\le t\le 1$$

$$= \underbrace{t}_{x(t)}\, i + \underbrace{2t}_{y(t)}\, j \;;\; 0\le t\le 1$$

ดังนั้น

$$\int_C (x+y)^2\,dx + (x-y)^2\,dy = \int_{C_1} (x+y)^2\,dx + (x-y)^2\,dy + \int_{C_2} (x+y)^2\,dx + (x-y)^2\,dy$$

$$= \int_{t=0}^{t=1} \big((t-1)+(2-2t)\big)^2 (1)\,dt + \int_{t=0}^{t=1} \big((t-1)-(2-2t)\big)^2 (-2)\,dt$$

$$+ \int_{t=0}^{t=1} (t+2t)^2 (1)\,dt + \int_{t=0}^{t=1} (t-2t)^2 (2)\,dt$$

= ฝากคำนวณต่อ $\square$

INTEGRATING A VECTOR FIELD ALONG A CURVE

There is an alternative notation for line integrals with respect to x, y, and z that is particularly appropriate for dealing with problems involving vector fields. We will interpret $d\mathbf{r}$ as

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} \quad \text{or} \quad d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

depending on whether C is in 2-space or 3-space. For an oriented curve C in 2-space and a vector field

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

we will write

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy \tag{26}$$

Similarly, for a curve C in 3-space and vector field

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

we will write

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \int_C f(x, y, z)\,dx + g(x, y, z)\,dy + h(x, y, z)\,dz \end{aligned} \tag{27}$$

With these conventions, we are led to the following definition.

15.2.2 DEFINITION If $\mathbf{F}$ is a continuous vector field and C is a smooth oriented curve, then the ***line integral of* $\mathbf{F}$ *along* C** is

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{28}$$

The notation in Definition 15.2.2 makes it easy to remember the formula for evaluating the line integral of $\mathbf{F}$ along C. For example, suppose that C is an oriented curve in the plane given in vector form by

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad (a \le t \le b)$$

If we write

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t))\mathbf{i} + g(x(t), y(t))\mathbf{j}$$

then

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt \tag{29}$$

▶ **Example 8** Evaluate $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ where $\mathbf{F}(x, y) = \cos x\,\mathbf{i} + \sin x\,\mathbf{j}$ and where C is the given oriented curve.

(a) $C : \mathbf{r}(t) = -\frac{\pi}{2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} \quad (1 \le t \le 2)$ (see Figure 15.2.12a)

$x(t)$ $y(t)$

(b) $C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \quad (-1 \le t \le 2)$ (see Figure 15.2.12b)

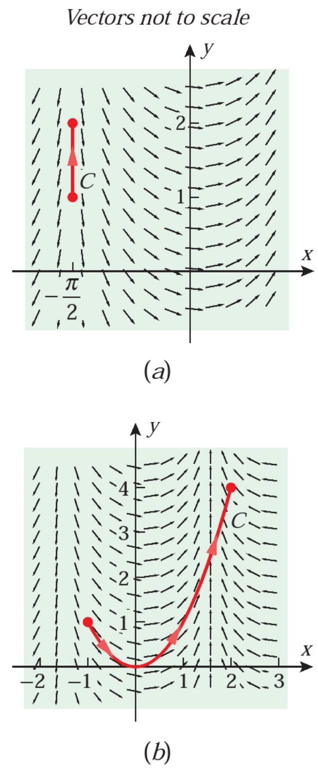
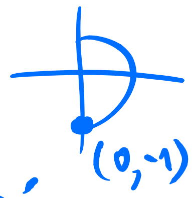


Figure 15.2.12

(a)

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

<u>Note!</u> $\mathbf{r}(t) = \underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{x(t)}\,i + \underbrace{t}_{y(t)}\,j$



$\Rightarrow \mathbf{F}(x,y) = \cos x(t)\,i + \sin x(t)\,j$

$\Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos(-\frac{\pi}{2})\,i + \sin(-\frac{\pi}{2})\,j$

$= 0\cdot i + (-1)j$

$= -j$

และ $\mathbf{r}'(t) = 0\cdot i + j = j$

ดังนั้น $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t=1}^{t=2} (-j)\cdot j\,dt = \int_{t=1}^{t=2} (-1)\,dt = -t\Big|_{t=1}^{t=2}$

$= -2-(-1) = -1$

(b) ฝาก!

งาน การนำปริพันธ์ตามเส้นไปใช้ที่สำคัญอันหนึ่ง คือ การศึกษาเรื่องงาน ถ้าแรงคงตัว $\vec{F}$ กระทำต่ออนุภาคให้เคลื่อนที่ไปตามเส้นตรงจากจุด P ไปยังจุด Q จะได้งานที่กระทำโดย $\vec{F}$ คือ

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{PQ} = \left(\left\|\vec{F}\right\| \cos\theta\right)\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$$

โดยที่ $\left\|\vec{F}\right\|\cos\theta$ เป็นส่วนประกอบของแรงในทิศทางการเคลื่อนที่และ $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$ คือระยะทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค

จะเห็นว่าความรู้พื้นฐานของงานไม่เพียงพอต่อการนำไปใช้ ตัวอย่างการเคลื่อนที่ของจรวดผ่านสนามแรงโน้มถ่วงของโลก วิถีจะเป็นเส้นโค้งมากกว่าเป็นเส้นตรงและแรงดึงดูดของโลกที่มีต่อจรวดก็ไม่คงที่แต่จะเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งที่สัมพันธ์จุดศูนย์กลางของโลก ดังนั้นต้องพิจารณามากกว่าธรรมดาทั่วไปของงานที่ได้จากการที่อนุภาคเคลื่อนไปตามเส้นโค้ง C ขณะที่แรงก็พิจารณาในแต่ละจุดที่อยู่บนเส้นโค้ง (ดูรูปที่18.1.4)

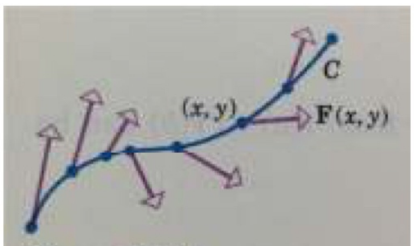


Figure 18.1.4

สมมุติว่า C เป็นเส้นโค้งเรียบที่กำหนดโดยตัวแปรเสริมโดยสมการ

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \le t \le b)$$

และเวกเตอร์ของแรงที่จุด (x, y) บนเส้นโค้ง คือ

$$\vec{F}(x, y) = f(x, y)\vec{i} + g(x, y)\vec{j}$$

โดยที่ $f(x, y)$ และ $g(x, y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ให้ $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ $(a \le t \le b)$ เป็นเวกเตอร์ประจำตำแหน่งของสำหรับ C และกำหนดฟังก์ชัน $W(t)$ โดย

$W(t) =$ งานที่เกิดจากการกระทำให้อนุภาคเคลื่อนจากจุดเริ่มต้น $r(a)$ ไปยังจุด $r(t)$ (ดูรูปที่18.1.5) ดังนั้นงานที่เกิดจากการทีอนุภาคเคลื่อนจาก $r(a)$ ไปยัง $r(t+\Delta t)$ คือ $W(t+\Delta t)$ และงานที่เกิดจากการกระทำให้อนุภาคเคลื่อนที่จาก $r(t)$ ไปยัง $r(t+\Delta t)$ คือ $W(t+\Delta t) - W(t)$

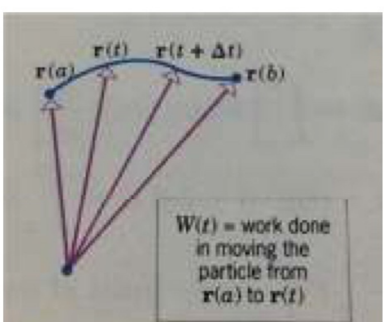


Figure 18.1.5

ถ้า Δt มีค่าน้อย ๆ ก็มีเหตุผลที่จะประมาณส่วนของเส้นโค้งระหว่าง $r(t)$ กับ $r(t+\Delta t)$ ด้วยเส้นตรง ถ้าเวกเตอร์ของแรง $\vec{F}$ ไม่เปลี่ยนแปลงมากในส่วนสั้น ๆ ของเส้นโค้ง สามารถสมมุติว่าแรงคงที่ระหว่าง $r(t)$ กับ $r(t+\Delta t)$ และให้เท่าแรงที่ $r(t)$ ดังนั้นงานที่เกิดจากการกระทำให้อนุภาคเคลื่อนจาก $r(t)$ ไปยัง $r(t+\Delta t)$ สามารถประมาณค่าได้ดังนี้ ถ้า Δt มีค่าน้อย ๆ

$$W(t+\Delta t) - W(t) \approx \vec{F}\left(x(t), y(t)\right) \cdot \left[r(t+\Delta t) - r(t)\right]$$

ถ้าสมมุติว่าความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าลดลงเข้าใกล้ศูนย์ขณะที่ $\Delta t \to 0$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{W(t+\Delta t)-W(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\vec{F}\left(x(t), y(t)\right)\cdot \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}\right]$$

หรือ

$$W'(t) = \vec{F}\left(x(t), y(t)\right)\cdot \vec{r}\,'(t)$$

เนื่องจาก $W(t)$ แทนงานที่เกิดจากการกระทำให้อนุภาคเคลื่อนที่จาก $r(a)$ ไปยัง $r(t)$ จะได้ว่า $W(a)=0$ ดังนั้นผลรวมของงานที่เกิดจากการกระทำให้อนุภาคเคลื่อนที่จาก $r(a)$ ไปยัง $r(t)$ สามารถเขียนแทนด้วย

$$W = W(b) - W(a) = \int_a^b W'(t)\,dt$$

หรือ

$$W = \int_a^b \vec{F}\left(x(t), y(t)\right)\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

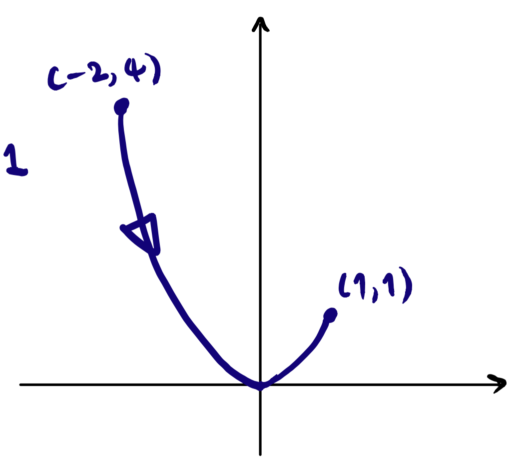
เนื่องจากกรณีนี้เป็นการหาปริพันธ์ตามเส้นบน C ของแรง $\vec{F}$ จะให้นิยามของงานที่เกิดจากการกระทำให้อนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง C คือ

$$W = \int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}$$

ตัวอย่าง 4.1.6 จงหางานที่เกิดจากการกระทำให้อนุภาคเคลื่อนที่จากจุด $(-2,4)$ ไปยังจุด $(1,1)$ ตามเส้นโค้งพาราโบลา $y = x^2$ ด้วยแรง

$$\vec{F}(x,y) = x^3 y\vec{i} + (x-y)\vec{j}$$

$r(t) = ?$



วิธีทำ. สมการอิงพารามิเตอร์ (เส้นโค้ง)

$x(t) = t,\ y(t) = t^2\ ;\ -2 \le t \le 1$

$\Rightarrow r(t) = ti + t^2 j\ ;\ -2 \le t \le 1$

หางาน: $W = \int_C F(x,y)\cdot dr$

จาก $r(t) = ti + t^2 j$

$\Rightarrow \frac{dr(t)}{dt} = i + 2tj \Rightarrow dr = (i + 2tj)\,dt$

$\Rightarrow W = \int_{t=-2}^{t=1} (t^3 t^2 i + (t-t^2) j)\cdot(i+2tj)\,dt = \int_{t=-2}^{t=1} (t^5 + 2t^2 - 2t^3)\,dt = \cdots$

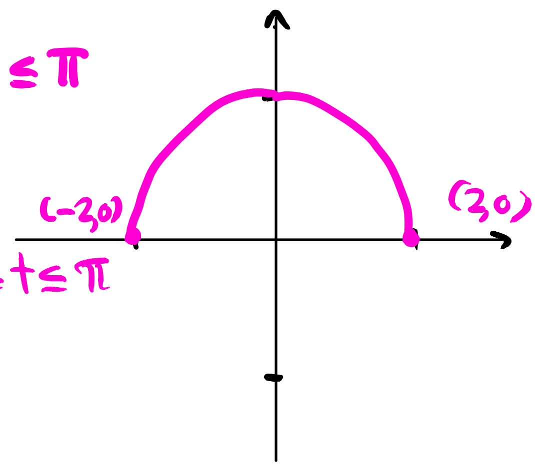
- **ตัวอย่าง 4.1.7** จงหางานที่เกิดจากการกระทำให้อนุภาคเคลื่อนที่จากจุด $(2,0)$ ไปยังจุด $(-2,0)$ ตามเส้นโค้งครึ่งวงกลม $x^2+y^2=4$ ด้วยแรง

$$\checkmark \quad \vec{F}(x,y) = y\vec{i} + x\vec{j} \qquad \text{หา } \mathbf{r}(t) = ?$$

$$W = \int_C \underbrace{\mathbf{F}(x,y)} \cdot \underbrace{d\mathbf{r}}$$

- สมการอิงตัวแปรเสริมของวงกลม $x^2+y^2=a^2$
  $\Rightarrow \mathbf{r}(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j \;;\quad 0 \le t \le 2\pi$

$$\mathbf{r}(t) = \underbrace{2\cos t}_{x(t)}\, i + \underbrace{2\sin t}_{y(t)}\, j \qquad 0 \le t \le \pi$$



$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -2\sin t\, i + 2\cos t\, j \;;\quad 0 \le t \le \pi$$

นั่นคือ

$$\int_C \mathbf{F}(x,y) \cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{t=\pi} (y i + x j) \cdot (-2\sin t\, i + 2\cos t\, j)\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=\pi} (2\sin t\, i + 2\cos t\, j) \cdot (-2\sin t\, i + 2\sin t\, j)\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=\pi} 4(\cos^2 t - \sin^2 t)\, dt$$

$$= 4\int_{t=0}^{t=\pi} \cos 2t\, dt = \frac{4}{2}\sin 2t \Big|_{t=0}^{t=\pi} = 2\sin 2\pi - 2\sin 0 = 0$$

D

ปริพันธ์ตามเส้นบนเส้นโค้งในสามมิติ ปริพันธ์ตามเส้นสามารถขยายไปยังสามมิติได้ ถ้า C เป็นเส้นโค้งเรียบในสามมิติกำหนดอิงตัวแปรเสริมโดย

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a \le t \le b)$$

และ $f(x,y,z),\ g(x,y,z)$ และ $h(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนบริเวณที่บรรจุ C แล้วจะกำหนด

$$\int_C f(x,y,z)dx = \int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)dt$$

$$\int_C g(x,y,z)dy = \int_a^b g\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t)dt$$

$$\int_C h(x,y,z)dz = \int_a^b h\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)dt$$

$$\int_C f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz$$

$$= \int_C f(x,y,z)dx + \int_C g(x,y,z)dy + \int_C h(x,y,z)dz$$

ถ้าให้

$$\vec{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\vec{i} + g(x,y,z)\vec{j} + h(x,y,z)\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

แล้วจะได้

$$\int_C f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz = \int_C \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r}$$

ยิ่งกว่านั้น จะได้ว่า

$$\int_C \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r} = \int_a^b \left[\vec{F}\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right]dt$$

สุดท้ายถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง C ในสามมิติ โดยการกระทำของแรง $\vec{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\vec{i} + g(x,y,z)\vec{j} + h(x,y,z)\vec{k}$ แล้วกำหนดงาน W ที่เกิดจากการกระทำของแรง คือ

$$W = \int_C \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r}$$

ตัวอย่าง 4.1.8 จงหาค่า $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ถ้า $\vec{F}(x,y,z) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ และ C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดด้วย $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k} \quad (0 \le t \le 1)$

วิธีทำ $\int_C F\cdot dr$ หาได้ดังนี้

จาก $r(t) = \underbrace{t}_{x(t)}i + \underbrace{t^2}_{y(t)}j + \underbrace{t^3}_{z(t)}k \ ;\ 0 \le t \le 1$

$\rightarrow \dfrac{dr}{dt} = i + 2tj + 3t^2k \ ;\ 0 \le t \le 1$

$\Rightarrow \int_C F\cdot dr = \int_{t=0}^{t=1} (t^2t^3 i + tt^3 j + tt^2 k)\cdot(i + 2tj + 3t^2k)dt = \int_{t=0}^{t=1}(t^5 + 2t^5 + 3t^5)dt$

$= 6\int_{t=0}^{t=1} t^5 dt = t^6\Big|_{t=0}^{t=1} = 1$

ตัวอย่าง 4.1.9 จงหาค่า $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ถ้า $\vec{F}(x,y,z)=\left(y-x^2\right)\vec{i}+\left(z-y^2\right)\vec{j}+\left(x-z^2\right)\vec{k}$ และ C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดด้วย $\vec{r}(t)=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$ $(0\le t\le 1)$

วิธีทำ จาก $r(t)=\underbrace{t}_{x(t)}i+\underbrace{t^2}_{y(t)}j+\underbrace{t^3}_{z(t)}k \; ; 0\le t\le 1$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt}=i+2tj+3t^2k \; ; 0\le t\le 1$$

$$\Rightarrow F(x,y,z)=(t^2-t^2)i+(t^3-t^4)j+(t-t^6)k$$

$$=(t^3-t^4)j+(t-t^6)k$$

นั่นคือ

$$\int_C F\cdot dr=\int_{t=0}^{t=1}\left((t^3-t^4)j+(t-t^6)k\right)\cdot\left(i+2tj+3t^2k\right)dt$$

$$=\int_{t=0}^{t=1}(2t^4-2t^5+3t^3-3t^8)\,dt$$

$$=\left[\frac{2t^5}{5}-\frac{2t^6}{6}+\frac{3t^4}{4}-\frac{3t^9}{9}\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$=\frac{2}{5}-\frac{2}{6}+\frac{3}{4}-\frac{3}{9}$$

$$=\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{24-20+45-20}{60}$$

$$=\frac{29}{60}$$

#

แบบฝึกหัด (ควรทำนะ)

7–10 Evaluate $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ along the line segment C from P to Q.

7. $\mathbf{F}(x, y) = 8\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$; $P(-4, 4)$, $Q(-4, 5)$

8. $\mathbf{F}(x, y) = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$; $P(1, -3)$, $Q(4, -3)$

9. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{j}$; $P(-2, 4)$, $Q(-2, 11)$

10. $\mathbf{F}(x, y) = -8x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$; $P(-1, 0)$, $Q(6, 0)$

11. Let C be the curve represented by the equations

$$x = 2t, \quad y = t^2 \qquad (0 \le t \le 1)$$

In each part, evaluate the line integral along C.

~~(a)~~ $\int_C (x - \sqrt{y})\, ds$ (b) $\int_C (x - \sqrt{y})\, dx$

(c) $\int_C (x - \sqrt{y})\, dy$

12. Let C be the curve represented by the equations

$$x = t, \quad y = 3t^2, \quad z = 6t^3 \qquad (0 \le t \le 1)$$

In each part, evaluate the line integral along C.

~~(a)~~ $\int_C xyz^2\, ds$ (b) $\int_C xyz^2\, dx$

(c) $\int_C xyz^2\, dy$ (d) $\int_C xyz^2\, dz$

13. In each part, evaluate the integral

$$\int_C (3x + 2y)\, dx + (2x - y)\, dy$$

along the stated curve.

(a) The line segment from $(0, 0)$ to $(1, 1)$.
(b) The parabolic arc $y = x^2$ from $(0, 0)$ to $(1, 1)$.
(c) The curve $y = \sin(\pi x/2)$ from $(0, 0)$ to $(1, 1)$.
(d) The curve $x = y^3$ from $(0, 0)$ to $(1, 1)$.

14. In each part, evaluate the integral

$$\int_C y\, dx + z\, dy - x\, dz$$

along the stated curve.

(a) The line segment from $(0, 0, 0)$ to $(1, 1, 1)$.
(b) The twisted cubic $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ from $(0, 0, 0)$ to $(1, 1, 1)$.
(c) The helix $x = \cos \pi t$, $y = \sin \pi t$, $z = t$ from $(1, 0, 0)$ to $(-1, 0, 1)$.

23–30 Evaluate the line integral along the curve C.

23. $\int_C (x + 2y)\, dx + (x - y)\, dy$
$C: x = 2\cos t,\ y = 4\sin t \quad (0 \le t \le \pi/4)$

24. $\int_C (x^2 - y^2)\, dx + x\, dy$
$C: x = t^{2/3},\ y = t \quad (-1 \le t \le 1)$

25. $\int_C -y\, dx + x\, dy$
$C: y^2 = 3x$ from $(3, 3)$ to $(0, 0)$

26. $\int_C (y - x)\, dx + x^2 y\, dy$
$C: y^2 = x^3$ from $(1, -1)$ to $(1, 1)$

27. $\int_C (x^2 + y^2)\, dx - x\, dy$
$C: x^2 + y^2 = 1$, counterclockwise from $(1, 0)$ to $(0, 1)$

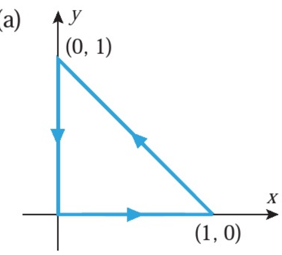
28. $\int_C (y - x)\, dx + xy\, dy$
C: the line segment from $(3, 4)$ to $(2, 1)$

29. $\int_C yz\, dx - xz\, dy + xy\, dz$
$C: x = e^t,\ y = e^{3t},\ z = e^{-t} \quad (0 \le t \le 1)$

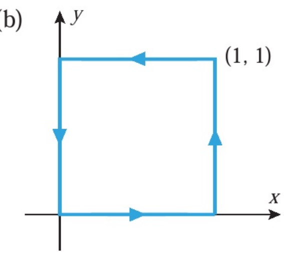
30. $\int_C x^2\, dx + xy\, dy + z^2\, dz$
$C: x = \sin t,\ y = \cos t,\ z = t^2 \quad (0 \le t \le \pi/2)$

33–34 Evaluate $\int_C y\,dx - x\,dy$ along the curve C shown in the figure. ■

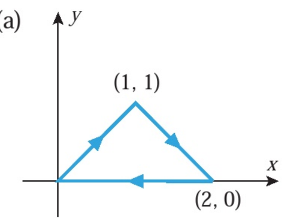
33. (a)



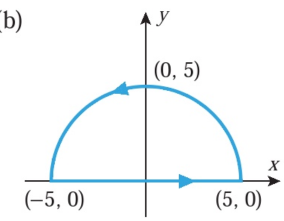
(b)



34. (a)

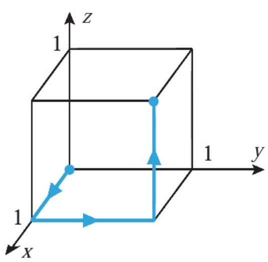


(b)

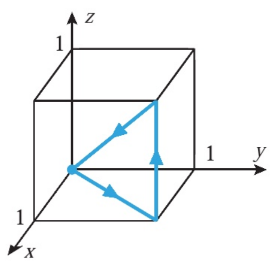


35–36 Evaluate $\int_C x^2z\,dx - yx^2\,dy + 3\,dz$ along the curve C shown in the figure. ■

35.



36.



37–40 Evaluate $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ along the curve C. ■

37. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$
$C : \mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} \quad (0 \le t \le \pi)$

38. $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
$C : \mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 1)$

39. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)^{-3/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$
$C : \mathbf{r}(t) = e^t \sin t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 1)$

40. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
$C : \mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j} + \sin^2 t\,\mathbf{k} \quad (0 \le t \le \pi/2)$

45–48 Find the work done by the force field $\mathbf{F}$ on a particle that moves along the curve C. ■

45. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$
$C : x = y^2$ from $(0, 0)$ to $(1, 1)$

46. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + xy)\mathbf{i} + (y - x^2y)\mathbf{j}$
$C : x = t, \ y = 1/t \quad (1 \le t \le 3)$

47. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$
$C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad (0 \le t \le 1)$

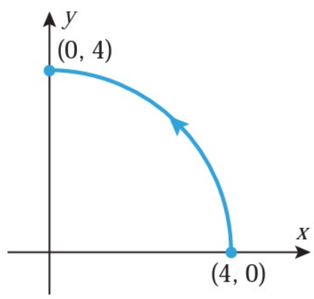
48. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$
C : along line segments from $(0, 0, 0)$ to $(1, 3, 1)$ to $(2, -1, 4)$

49–50 Find the work done by the force field

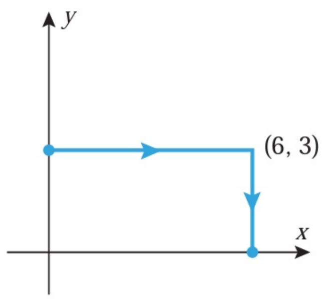
$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{4}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

on a particle that moves along the curve C shown in the figure. ■

49.



50.



54. Evaluate the integral $\displaystyle\int_{-C} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$, where C is the circle $x^2 + y^2 = a^2$ traversed counterclockwise.

55. Suppose that a particle moves through the force field $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$ from the point $(0, 0)$ to the point $(1, 0)$ along the curve $x = t$, $y = \lambda t(1 - t)$. For what value of λ will the work done by the force field be 1?

56. A farmer weighing 150 lb carries a sack of grain weighing 20 lb up a circular helical staircase around a silo of radius 25 ft. As the farmer climbs, grain leaks from the sack at a rate of 1 lb per 10 ft of ascent. How much work is performed by the farmer in climbing through a vertical distance of 60 ft in exactly four revolutions? [*Hint:* Find a vector field that represents the force exerted by the farmer in lifting his own weight plus the weight of the sack upward at each point along his path.]