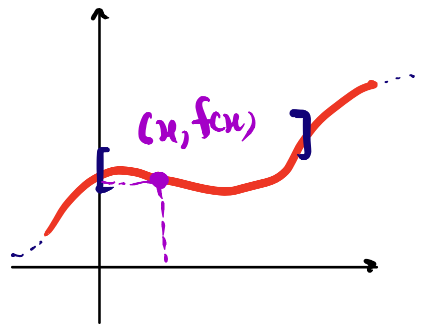
3.6 เส้นโค้งและความยาวของเส้นโค้ง [Curves and their Lengths]

• เส้นโค้ง (curve): กราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์บนช่วงหนึ่ง ๆ



$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$

<u>ตัวอย่าง</u>: กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบนช่วง I ใด ๆ จงแสดงว่า กราฟของ f เป็นเส้นโค้ง และจงหาฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่กำหนดเส้นโค้งนี้

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันค่าจริงบน ซึ่งจะขึ้นกับตัวแปร $x \in I$ จะได้ว่า $f(x) \in \mathbb{R}$

ถ้ามี $x \in \mathbb{R} \Rightarrow y := f(x) \in \mathbb{R}$

กำหนดให้ $t \in I$

$x = t \qquad y = f(t)$

นั่นคือ เราสามารถนิยาม ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j} \quad //$$

เนื่องจาก กราฟของ f เป็นกราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\therefore$

เพราะฉะนั้น กราฟของ f เป็นเส้นโค้ง และมีฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่กำหนดเส้นโค้งนี้คือ

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$$

$\square$

กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้ง (curve) เฉพาะนิยาม

• "เส้นโค้งปิด" (closed curve) : ถ้า C สามารถถูกเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}$ บนช่วง $[a,b]$ และ

$$\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$$

• "เส้นโค้งปรับเรียบ" (Smooth curve) : ถ้า C สามารถถูกเขียนในรูปของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}$ บนช่วง I ใดๆ โดยที่

- $\mathbf{r}'(t)$ ต่อเนื่องบน I

และ
- $\mathbf{r}'(t) \neq 0, \ \forall t \in I$

C :

ตัวอย่าง. จงตรวจสอบว่า วงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุด $(0,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง เป็นเส้นโค้งปรับเรียบ

วิธีทำ. Note! ① C สามารถถูกเขียนในรูปของ $\mathbf{r}$ (หา $\mathbf{r}$)

② กำหนดให้ I เป็นช่วงใดๆ 2.1 $\mathbf{r}'(t)$ ต่อเนื่องบน I

2.2 $\mathbf{r}'(t) \neq 0, \forall t \in I$

พิจารณาเนื่องจากสมการวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุด $(0,0)$ เป็นจุดศูนย์กลางคือ

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\, \mathbf{i} + \sin t\, \mathbf{j} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

2.1 กำหนดให้ $t \in [0,2\pi]$ จะตรวจสอบว่า $\mathbf{r}'(t)$ ต่อเนื่องบน $[0,2\pi]$

จาก $\mathbf{r}(t) = \cos t\, \mathbf{i} + \sin t\, \mathbf{j}$

$\Rightarrow \mathbf{r}'(t) = -\sin t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j}$

เนื่องจาก $-\sin t$ และ $\cos t$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,2\pi]$

ดังนั้น $\mathbf{r}'(t)$ ต่อเนื่องบน $[0,2\pi]$

(2.2) เนื่องจาก $r'(t) = -\sin t\, i + \cos t\, j \quad \forall t \in [0, 2\pi]$
และเราทราบว่า ไม่มีตัวแปรเสริม $t \in [0, 2\pi]$ ใดที่ทำให้
$-\sin t = \cos t = 0$
เราจึงสรุปได้ว่า C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบ (smooth curve)

□

ตัวอย่าง: จงตรวจสอบว่า เส้นโค้งที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
$r(t) = t^2 i + t^3 j + (e^t - t) k$ เป็นเส้นโค้งปรับเรียบหรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $r(t) = t^2 i + t^3 j + (e^t - t) k$
สำหรับทุก $t \in \mathbb{R}$

$$\left[\begin{array}{l} ①\ r'(t) \text{ ต่อเนื่อง สำหรับทุก } t \in \mathbb{R} \\ ②\ r'(t) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \end{array}\right]$$

① พิจารณา $r(t) = t^2 i + t^3 j + (e^t - t) k$

$$\Rightarrow r'(t) = 2t\, i + 3t^2 j + (e^t - 1) k$$

เนื่องจาก ฟังก์ชันส่วนประกอบ $2t$, $3t^2$ และ $e^t - 1$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จึงได้ว่า $r'(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย

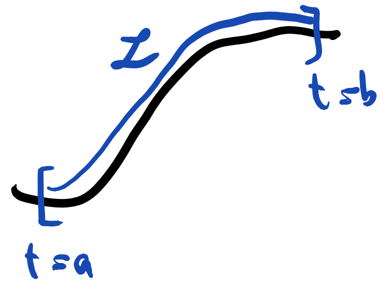
② พิจารณา $r'(t) = 2t\, i + 3t^2 j + (e^t - 1) k$
สังเกตว่า

$$\left.\begin{array}{l} 2(0) = 0 \\ 3(0)^2 = 0 \\ e^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \end{array}\right\} \text{หมายความว่า } r'(0) = 0$$

ดังนั้น เส้นโค้ง C ไม่เป็นเส้นโค้งปรับเรียบ □

<u>ทฤษฎีบท</u>: ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่ถูกกำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ แล้ว "<u>ความยาวของส่วนโค้ง C</u>" ระหว่างช่วง $[a, b]$ คือ

$$L := \int_{t=a}^{t=b} \|r'(t)\|\,dt$$



$L_0 = ?$

<u>ตัวอย่าง</u>: จงหา<u>ความยาวส่วนโค้ง</u>ของวงกลมที่กำหนดโดย

$$x = a\cos t,\quad y = a\sin t \text{ และ } z = ct$$

ระหว่าง $t = 0$ ถึง $t = t_0$ [Check! smooth curve?]

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$
$$= a\cos t\, i + a\sin t\, j + ctk$$

จะได้ว่า

$$r'(t) = -a\sin t\, i + a\cos t\, j + ck$$

ดังนั้น

$$\|r'(t)\| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + c^2}$$
$$= \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

ดังนั้น $$L = \int_{t=0}^{t=t_0} \|r'(t)\|\,dt = \int_{t=0}^{t=t_0} \sqrt{a^2+c^2}$$
$$= \sqrt{a^2+c^2}\,t\Big]_{t=0}^{t=t_0} = t_0\sqrt{a^2+c^2}$$

□

• ความยาวส่วนโค้ง ในระบบพิกัดเชิงขั้ว:

ทฤษฎีบท: ถ้า C เป็นเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้วที่ถูกกำหนดโดยสมการขั้ว

$$r = f(\theta)$$

บนช่วง $[\alpha, \beta]$ จะได้ว่า ความยาวส่วนโค้ง C บน $[\alpha,\beta]$

มุม

คือ

$$I = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta$$

ตัวอย่าง: จงหาความยาวเส้นโค้งคาร์ดิออยด์ $r = 1-\cos\theta$ บนช่วง $0 \le \theta \le 2\pi$

วิธีทำ. จากสูตร

$$I = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta$$

จาก $f(\theta) = 1-\cos\theta \Rightarrow [f(\theta)]^2 = (1-\cos\theta)^2$

$\Rightarrow f'(\theta) = \sin\theta \Rightarrow [f'(\theta)]^2 = \sin^2\theta$

ดังนั้น

• $[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2 = (1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta$

$= 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$= 2 - 2\cos\theta$

$= 4\sin^2\frac{\theta}{2}$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

(Check!)

Proof

$$L = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= -4\cos\frac{\theta}{2}\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$= -4[\cos\pi - \cos 0] = -4[-1-1] = -4(-2)$$

$$= 8 \text{ units}$$

$\square$