ทบทวน! กำหนดให้ $F(t) = ti + t^2 j - 3k$ และ
$G(t) = ti + tj + tk$

① จงหา $(F \cdot G)'(t)$

วิธีทำ จากสูตร

$$(F \cdot G)'(t) = F(t) \cdot G'(t) + G(t) \cdot F'(t)$$

พิจารณา จาก $G(t) = ti + tj + tk$

จะได้ $G'(t) = i + j + k$

และ จาก $F(t) = ti + t^2 j - 3k$

จะได้ $F'(t) = i + 2tj$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}(F \cdot G)'(t) &= (ti + t^2 j - 3k) \cdot (i + j + k) \\ &\quad + (ti + tj + tk) \cdot (i + 2tj) \\ &= t + t^2 - 3 + t + 2t^2 + 0 \\ &= 3t^2 + 2t - 3\end{aligned}$$

② $(F \times G)'(t)$

วิธีทำ จากสูตร ① ②

$$(F \times G)'(t) = F(t) \times G'(t) + G(t) \times F'(t)$$

พิจารณา ①;

$$F(t) \times G'(t) = \left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ t & t^2 & -3 & t & t^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

$$= t^2 i - 3j + tk - t^2 k + 3i - tj$$

$$= (t^2 + 3)i + (-t - 3)j + (t - t^2)k$$

พิจารณา ②;

$$G(t)\times F'(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ t & t & t \\ 1 & 2t & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} i & j \\ t & t \\ 1 & 2t \end{matrix}$$

$$= 0 + tj + 2t^2k - tk - 2t^2 i + 0$$

$$= -2t^2 i + tj + (2t^2 - t)k$$

ดังนั้น ① + ②;

$$(F\times G)'(t) = (t^2+3-2t^2)i + (-t-3+t)j + (t-t^2+2t^2-t)k$$

$$= (-t^2+3)i - 3j + t^2k$$

$$= \,?$$

$\square$

Check!

[พระประภา แนะนำ cross แล้วค่อย diff. อาจจะง่ายกว่า]

3.4 ความเร็วและความเร่ง (Velocity and Acceleration)

ให้ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์บอกตำแหน่ง ของอนุภาคที่เคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งในปริภูมิ 3D เรานิยาม

① Velocity (ความเร็ว)

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

② acceleration (ความเร่ง)

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k}$$

③ speed (อัตราเร็ว)

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง ณ เวลา t ใดๆ โดยมีสมการการเคลื่อนที่เป็น

$$x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = 2\sin t \quad \text{และ} \quad z(t) = 1$$

(1) จงหา $\underbrace{\text{เวกเตอร์บอกตำแหน่ง}}_{\mathbf{r}(t)}$ $\underbrace{\text{ความเร็ว}}_{\mathbf{v}(t)}$ $\underbrace{\text{ความเร่ง}}_{\mathbf{a}(t)}$ และ $\underbrace{\text{อัตราเร็ว}}_{\|\mathbf{v}(t)\|}$ ของอนุภาคนี้ ณ เวลา t ใดๆ

<u>วิธีทำ</u> จากสมการการเคลื่อนที่ จะได้ เวกเตอร์บอกตำแหน่ง

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad ✓$$

พิจารณา $\mathbf{v}(t) = \dfrac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$

$= -2\sin t\, \mathbf{i} + 2\cos t\, \mathbf{j}$ ✓

พิจารณา $\mathbf{a}(t) = \dfrac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$

$= -2\cos t\, \mathbf{i} - 2\sin t\, \mathbf{j}$ ✓

และ $\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$

$= \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + 0^2}$

$= \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{4} = 2$

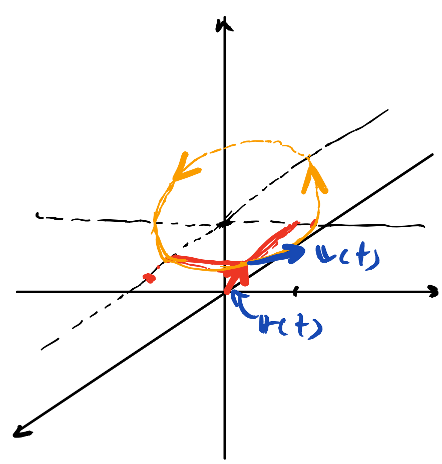
(2) จงหาวิถีการเคลื่อนที่ของอนุภาคพร้อมทั้งแสดงเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\mathbf{r}(\frac{\pi}{4})$ และเวกเตอร์ความเร็ว $\mathbf{v}(\frac{\pi}{4})$ ณ เวลา $t = \frac{\pi}{4}$ วินาที

พิจารณา

$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\, \mathbf{i} + 2\sin t\, \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\Rightarrow \mathbf{r}(\frac{\pi}{4}) = 2\cos(\frac{\pi}{4})\mathbf{i} + 2\sin(\frac{\pi}{4})\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$= \sqrt{2}\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$



พิจารณา

$\mathbf{v}(t) = -2\sin t\, \mathbf{i} + 2\cos t\, \mathbf{j}$

$\Rightarrow \mathbf{v}(\frac{\pi}{4}) = -2\sin(\frac{\pi}{4})\mathbf{i} + 2\cos(\frac{\pi}{4})\mathbf{j}$

$= -\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j}$

③ จงแสดงว่า ณ เวลา t ใดๆ เวกเตอร์ความเร็วตั้งฉากกับ เวกเตอร์ความเร่ง

พิจารณา จะต้องแสดงว่า

$$a(t)\cdot v(t) = 0$$

จาก $a(t) = -2\cos t\, i - 2\sin t\, j$

และ $v(t) = -2\sin t\, i + 2\cos t\, j$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a(t)\cdot v(t) &= (-2\cos t)(-2\sin t) + (-2\sin t)(2\cos t) \\ &= 4\cos t\sin t - 4\sin t\cos t \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

3.5 ปริพันธ์ (Integral)

กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่ $x(t), y(t)$ และ $z(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ ได้ว่า

"ปริพันธ์จำกัดเขต" (Definite Integral) ของ $\mathbf{r}(t)$ บน $[a,b]$ คือ

$$\int_{t=a}^{t=b} \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int_{t=a}^{t=b} x(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_{t=a}^{t=b} y(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int_{t=a}^{t=b} z(t)\,dt\right]\mathbf{k}$$

ตัวอย่าง: กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - 2\cos\pi t\,\mathbf{k}$ จงหา

$$\int_{t=0}^{t=1} \mathbf{r}(t)\,dt$$

วิธีทำ พิจารณา $\displaystyle\int_{t=0}^{t=1} x(t)\,dt = \int_{t=0}^{t=1} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big]_{t=0}^{t=1}$

$$= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

พิจารณา $\displaystyle\int_{t=0}^{t=1} y(t)\,dt = \int_{t=0}^{t=1} e^t\,dt = e^t\Big]_{t=0}^{t=1}$

$$= e^1 - e^0 = e - 1$$

และ พิจารณา $\displaystyle\int_{t=0}^{t=1} z(t)\,dt = \int_{t=0}^{t=1} (-2\cos\pi t)\,dt$

$$= -\frac{2}{\pi}\sin \pi t \Big]_{t=0}^{t=1}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\sin \pi - \sin 0\right] = -\frac{2}{\pi}[0-0] = 0$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{t=0}^{t=1} \mathbf{r}(t)\,dt = \frac{1}{3}\mathbf{i} + (e-1)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$

$$= \frac{1}{3}\mathbf{i} + (e-1)\mathbf{j} \qquad \square$$

สมบัติของการหาปริพันธ์:

ให้ $\mathbf{r}_1(t)$ และ $\mathbf{r}_2(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในระบบ 3D ที่ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ใดๆ และ k เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

(1) $$\int_{t=a}^{t=b} k\,\mathbf{r}_1(t)\,dt = k\int_{t=a}^{t=b} \mathbf{r}_1(t)\,dt$$

(2) $$\int_{t=a}^{t=b} [\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t)]\,dt = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{r}_1(t)\,dt \pm \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{r}_2(t)\,dt$$

กำหนดให้ $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ (บทนิยาม

ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) ของ $\mathbf{r}(t)$ คือ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{R}(t)$ โดยที่

$$\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$$

นั่นคือ

$$\frac{d}{dt}\left[\int \mathbf{r}(t)\,dt\right] = \mathbf{r}(t)$$

และ

$$\int \mathbf{r}'(t)\,dt = \mathbf{r}(t) + \mathbf{C}$$

← ค่าคงตัวจากการหาปริพันธ์

ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (Fundamental Theorem of Calculus)

ถ้า $\mathbf{R}(t)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $\mathbf{r}(t)$ บนช่วง $[a,b]$ จะได้ว่า

$$\int_{t=a}^{t=b} \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

Note!

$$\int \mathbf{v}(t)\,dt = \mathbf{r}(t) + \mathbf{C}$$

$$\int \mathbf{a}(t)\,dt = \mathbf{v}(t) + \mathbf{C}$$

ตัวอย่าง: อนุภาคชนิดหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งในสามมิติด้วยสมการความเร็ว

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

$\mathbf{r}(t) \Rightarrow \mathbf{r}(1)$

จงหาตำแหน่งของอนุภาคนี้ ณ เวลา $t = 1$ วินาที ถ้า ณ เวลา $t = 0$ วินาที อนุภาคนี้อยู่ที่ตำแหน่ง $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

วิธีทำ จากความสัมพันธ์

$$\int \mathbf{v}(t)\,dt = \mathbf{r}(t) + \mathbf{C}$$

นั่นคือ

$$r(t) = \int v(t)\,dt + C$$

$$= \int (i + tj + t^2k)\,dt + C$$

$$= ti + \frac{t^2}{2}j + \frac{t^3}{3}k + C$$

เนื่องจาก ณ วินาทีที่ $t=0$ เราทราบว่า ตำแหน่งคือ $-i+2j+4k$
นั่นคือ

$$r(0) = -i+2j+4k$$

ดังนั้น $-i+2j+4k = r(0) = \cancel{0i} + \cancel{\frac{0^2}{2}}j + \cancel{\frac{0^3}{3}}k + C$

$$\Rightarrow \quad C = -i+2j+4k$$

ดังนั้น เวกเตอร์ตำแหน่ง $r(t) = ti + \frac{t^2}{2}j + \frac{t^3}{3}k + (-i+2j+4k)$

$$= (t-1)i + \left(\frac{t^2}{2}+2\right)j + \left(\frac{t^3}{3}+4\right)k$$

เพราะฉะนั้น

$$r(1) = (1-1)i + \left(\frac{1^2}{2}+2\right)j + \left(\frac{1^3}{3}+4\right)k$$

$$= 0\cdot i + \frac{5}{2}j + \frac{13}{3}k = \frac{5}{2}j + \frac{13}{3}k \qquad \square$$

ตัวอย่าง. จงหาเวกเตอร์ตำแหน่ง ความเร็ว และอัตราเร็วของอนุภาค
เมื่อกำหนดความเร่ง $a(t) = \sin t\, i + \cos t\, j + e^t k$
ความเร็วเริ่มต้น $v(0) = k$ และ ตำแหน่งเริ่มต้น $r(0) = -i + k$

$$v(t) = (\cos t - 1) i + \sin t\, j + e^t k$$
$$\|v(t)\| = \sqrt{2\cos t + e^{2t} + 2}$$
$$r(t) = (\sin t - t - 1) i + (-\cos t + 1) j + e^t t$$

$$v(t) = \int a(t)\, dt + C$$
$$= \cos t\, i - \sin t\, j + e^t k + C$$

$v(0) = k$ ตัวเริ่ม

$$k = v(0) = \cos(0)\, i - \sin 0\, j + e^0 \cdot k + C$$
$$k = i + k + C$$
$$\Rightarrow C = -i$$
$$\Rightarrow v(t) = \cos t\, i - \sin t\, j + e^k t - i$$
$$= (\cos t - 1) i - \sin t\, j + e^k t$$