4.4 ปริพันธ์ตามพื้นผิว (Surface Integral)

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาความหมายของการหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ บนพื้นผิวอิงตัวแปรเสริมปรับเรียบ (smooth parametric surface)

แนวคิดเริ่มต้นของปริพันธ์ตามผิว เกิดจากความต้องการหามวล (mass) ของแผ่นบางโค้ง (curved lamina) ที่มีการกำหนดฟังก์ชันความหนาแน่น (density function : mass per unit area) มาให้

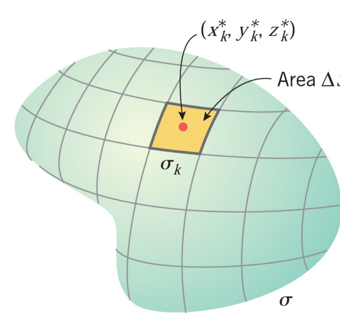
แผ่นบางโค้ง (curved lamina) คือ วัตถุในอุดมคติที่บางเพียงพอ (thin enough) จนสามารถมองเป็นพื้นผิวใน 3D ได้ ทั้งนี้แผ่นบางโค้งอาจจะมีลักษณะเป็นแผ่นงอ (bent plate) ดังรูป 15.5.1 หรืออาจจะมีลักษณะเป็นพื้นผิวที่ปิดล้อมบริเวณใน 3D เช่นเปลือกไข่ก็ได้

The thickness of a curved lamina is negligible.

▲ **Figure 15.5.1**

ในที่นี้เราสมมติให้แผ่นบางโค้งเป็นพื้นผิว อิงตัวแปรปรับเรียบ σ (sigma) กำหนดให้ (x,y,z) เป็นจุดใดๆ บน σ เราสมมติให้ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่น (density function) ณ จุด (x,y,z) บน σ เราสามารถหามวลของแผ่นบางนี้ โดยกระบวนการดังต่อไปนี้

- As shown in Figure 15.5.2, we divide σ into n very small patches $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ with areas $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$, respectively. Let (x_k^*, y_k^*, z_k^*) be a sample point in the kth patch with ΔM_k the mass of the corresponding section.
- If the dimensions of σ_k are very small, the value of f will not vary much along the kth section and we can approximate f along this section by the value $f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$. It follows that the mass of the kth section can be approximated by
$$\Delta M_k \approx f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$
- The mass M of the entire lamina can then be approximated by
$$M = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k \qquad (1)$$
- We will use the expression $n \to \infty$ to indicate the process of increasing n in such a way that the maximum dimension of each patch approaches 0. It is plausible that the error in (1) will approach 0 as $n \to \infty$ and the exact value of M will be given by
$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k \qquad (2)$$



▲ **Figure 15.5.2**

The limit in (2) is very similar to the limit used to find the mass of a thin wire [Formula (2) in Section 15.2]. By analogy to Definition 15.2.1, we make the following definition.

15.5.1 DEFINITION If σ is a smooth parametric surface, then the ***surface integral*** of $f(x, y, z)$ over σ is

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k \tag{3}$$

provided this limit exists and does not depend on the way the subdivisions of σ are made or how the sample points (x_k^*, y_k^*, z_k^*) are chosen.

นั่นคือ ถ้า σ เป็นพื้นผิวอิงตัวแปรเสริมเรียบ (e.g. lamina)
และ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ lamina แล้ว
มวล (mass) ของ lamina คือ

$$M = \iint_{\sigma} f(x,y,z)\, dS$$

ในกรณีที่พื้นผิว σ สามารถเขียนอยู่ในรูป $z = g(x,y)$
เราสามารถคำนวณ มวลของแผ่นบางหรือปริพันธ์ตามพื้นผิวบน σ ได้จาก

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS = \iint_{R} f(x, y, g(x, y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

สังเกตว่า บริเวณ R ในสูตรนี้เป็นภาพฉายของพื้นผิว σ ไปยังระนาบ XY
นอกจากนี้ ถ้าพื้นผิว σ สามารถเขียนอยู่ในรูป $x = g(y,z)$ หรือ $y = g(x,z)$
เราสามารถคำนวณปริพันธ์ตามพื้นผิวบนพื้นผิว σ ได้ดังนี้

"ทฤษฎีบท":

(1) ให้ σ เป็นพื้นผิวที่มีสมการเป็น $z = g(x, y)$ และ R เป็นภาพฉาย (projection) ของ σ ไปยังระนาบ XY

ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่องบน R และ $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน σ แล้ว

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS = \iint_{R} f(x, y, g(x, y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

(2) ให้ σ เป็นพื้นผิวที่มีสมการเป็น $y = g(x, z)$ และ R เป็นภาพฉาย (projection) ของ σ ไปยังระนาบ XZ

ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่องบน R และ $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน σ แล้ว

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS = \iint_{R} f(x, g(x, z), z)\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dA$$

(3) ให้ σ เป็นพื้นผิวที่มีสมการเป็น $x = g(y, z)$ และ R เป็นภาพฉาย (projection) ของ σ ไปยังระนาบ YZ

ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่องบน R และ $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน σ แล้ว

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS = \iint_{R} f(g(y, z), y, z)\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dA$$

ตัวอย่าง : จงหาค่าปริพันธ์ตามผิว

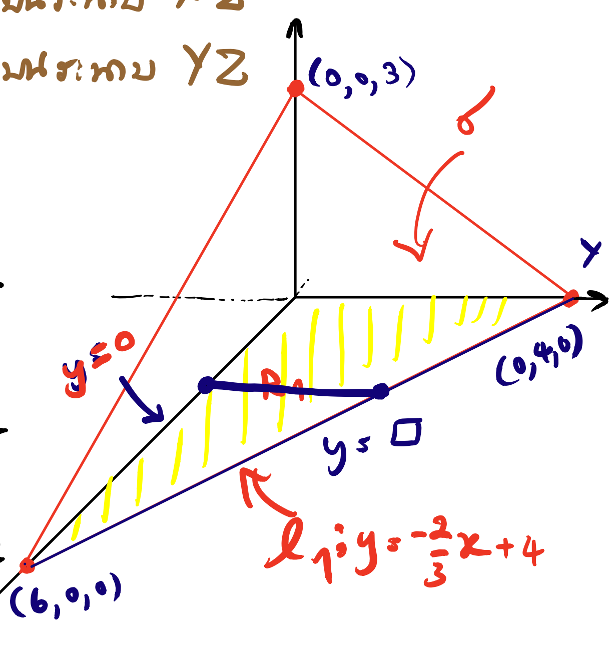
$$\iint_{\sigma} xyz\, dS$$

เมื่อ σ เป็นส่วนของระนาบ $2x+3y+4z=12$ ที่อยู่ในอัฐภาคที่หนึ่ง

โดย (1) R เป็นภาพฉายของ σ บนระนาบ XY

(2) R เป็นภาพฉายของ σ บนระนาบ XZ

(3) R เป็นภาพฉายของ σ บนระนาบ YZ



จากสมการระนาบจะได้ว่า

ถ้า $x=y=0 \Rightarrow 2(0)+3(0)+4z=12$

$\Rightarrow z = \frac{12}{4} = 3$

ถ้า $x=z=0 \Rightarrow 2(0)+3y+4(0)=12$

$\Rightarrow y = \frac{12}{3} = 4$

ถ้า $y=z=0 \Rightarrow 2x+3(0)+4(0)=12$

$\Rightarrow x = \frac{12}{2} = 6$

(1) ถ้า R เป็นภาพฉายของ σ บนระนาบ XY จะได้

$$\iint_{\sigma} xyz\, dS = \iint_{R_1} f(x,y,g(x,y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

จากสมการระนาบคือ $2x+3y+4z=12 \Rightarrow 4z = 12-2x-3y$

$$\Rightarrow z = \underbrace{\frac{1}{4}(12-2x-3y)}_{g(x,y)}$$

จาก $z = \frac{1}{4}(12-2x-3y) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

และ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{4}$

หาสมการขอบเขตของ y :

จากระนาบผ่าน $(6,0,0)$ และ $(0,4,0)$ จะได้ว่า

ความชันของ l_1 คือ $m = \frac{4-0}{0-6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

ดังนั้นสมการของ l_1 คือ $y - 0 = -\frac{2}{3}(x-6)$

$$\Rightarrow y = -\frac{2x}{3} + 4$$

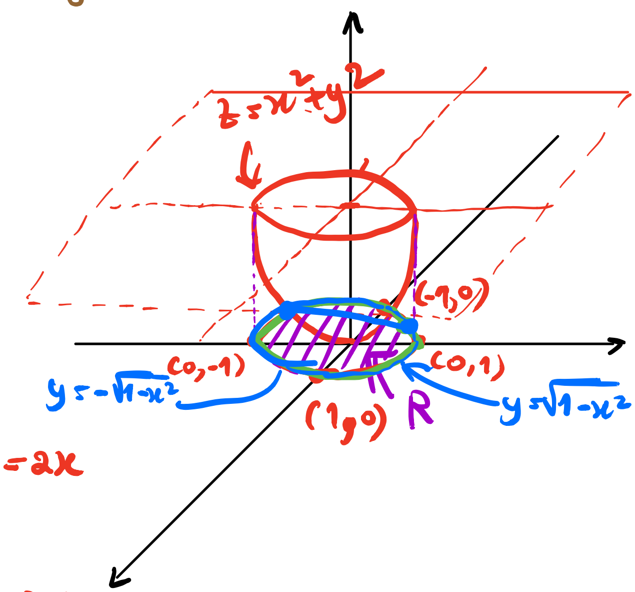
จากสูตร $\iint_\sigma f(x,y,z)\,dS = \iint_R f(x,y,g(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dA$

$$= \int_{x=0}^{x=6}\int_{y=0}^{y=-\frac{2}{3}x+4} xyz\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 1}\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=6}\int_{y=0}^{y=-\frac{2}{3}x+4} xy\,\frac{1}{4}(12-2x-3y)\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{16} + 1}\,dy\,dx$$

ตัวอย่าง : สมมติให้แผ่นบางโค้ง σ เป็นส่วนของ paraboloid $z = x^2 + y^2$ โดยอยู่ล่างระนาบ $z = 1$ ถ้าแผ่นบางโค้งนี้มีความหนาแน่นคงตัว นิยามโดย $\delta(x,y,z) = \delta_0$ แล้วจงหามวลของแผ่นบางโค้งนี้

วิธีทำ **ขั้นที่ 1**: วาดรูป !



จาก $z = \underbrace{x^2+y^2}_{g(x,y)}$

ขั้นที่ 2: หา $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$!

หาขอบเขตของ x และ y

จาก $z = x^2+y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial (x^2+y^2)}{\partial x} = 2x$

และ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial (x^2+y^2)}{\partial y} = 2y$

นั่นคือ R ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = -\sqrt{1-x^2}$ และ $y = \sqrt{1-x^2}$ โดย $-1 \le x \le 1$

ขั้นที่ 3: หา $\iint_\sigma f(x,y,z)\, dS$

จากสูตร

$$\iint_\sigma f(x,y,z)\, dS = \iint_R f(x,y,g(x,y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

$$= \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \delta_0 \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\, dy\, dx$$

$\square$

▶ **Example 3** Evaluate the surface integral

$$\iint_{\sigma} y^2 z^2 \, dS$$

where σ is the part of the cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ that lies between the planes $z = 1$ and $z = 2$ (Figure 15.5.4).

Solution. We will apply Formula (8) with

$$z = g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{and} \quad f(x, y, z) = y^2 z^2$$

Thus,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{and} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

so

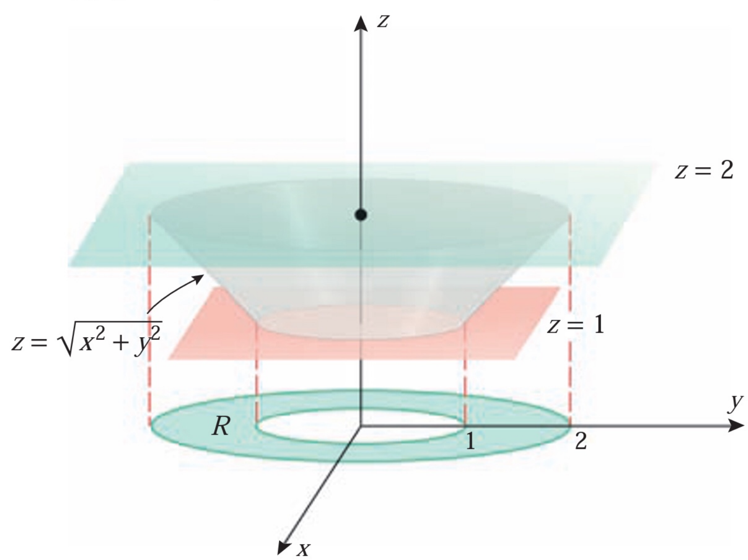
$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

(verify), and (8) yields

$$\iint_{\sigma} y^2 z^2 \, dS = \iint_{R} y^2 \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \sqrt{2} \, dA = \sqrt{2} \iint_{R} y^2 (x^2 + y^2) \, dA$$

where R is the annulus enclosed between $x^2 + y^2 = 1$ and $x^2 + y^2 = 4$ (Figure 15.5.4). Using polar coordinates to evaluate this double integral over the annulus R yields

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma} y^2 z^2 \, dS &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 (r \sin\theta)^2 (r^2) r \, dr \, d\theta \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^5 \sin^2\theta \, dr \, d\theta \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^6}{6} \sin^2\theta\right]_{r=1}^{2} d\theta = \frac{21}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta
\end{aligned}$$



Try! แบบฝึกหัด

EXERCISE SET 15.5 C CAS

✓ **1–8** Evaluate the surface integral

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS$$

1. $f(x, y, z) = z^2$; σ is the portion of the cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ between the planes $z = 1$ and $z = 2$.

2. $f(x, y, z) = xy$; σ is the portion of the plane $x + y + z = 1$ lying in the first octant.

3. $f(x, y, z) = x^2 y$; σ is the portion of the cylinder $x^2 + z^2 = 1$ between the planes $y = 0$, $y = 1$, and above the xy-plane.

4. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$; σ is the portion of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ above the plane $z = 1$.

5. $f(x, y, z) = x - y - z$; σ is the portion of the plane $x + y = 1$ in the first octant between $z = 0$ and $z = 1$.

6. $f(x, y, z) = x + y$; σ is the portion of the plane $z = 6 - 2x - 3y$ in the first octant.

7. $f(x, y, z) = x + y + z$; σ is the surface of the cube defined by the inequalities $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$. [*Hint:* Integrate over each face separately.]

8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$; σ is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

✓* **9–12 True–False** Determine whether the statement is true or false. Explain your answer.

9. If $f(x, y, z) \ge 0$ on σ, then

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS \ge 0$$

10. If σ has surface area S, and if

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS = S$$

then $f(x, y, z)$ is equal to 1 identically on σ.

11. If σ models a curved lamina, and if $f(x, y, z)$ is the density function of the lamina, then

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS$$

represents the total density of the lamina.

12. If σ is the portion of a plane $z = c$ over a region R in the xy-plane, then

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS = \iint_{R} f(x, y, c)\, dA$$

for every continuous function f on σ.

13–14 Sometimes evaluating a surface integral results in an improper integral. When this happens, one can either attempt to determine the value of the integral using an appropriate limit or one can try another method. These exercises explore both approaches.

13. Consider the integral of $f(x, y, z) = z + 1$ over the upper hemisphere σ: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $(0 \le x^2 + y^2 \le 1)$.
(a) Explain why evaluating this surface integral using (8) results in an improper integral.
(b) Use (8) to evaluate the integral of f over the surface $\sigma_r : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $(0 \le x^2 + y^2 \le r^2 < 1)$. Take the limit of this result as $r \to 1^-$ to determine the integral of f over σ.
(c) Parametrize σ using spherical coordinates and evaluate the integral of f over σ using (6). Verify that your answer agrees with the result in part (b).

14. Consider the integral of $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ over the cone $\sigma : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \le z \le 1)$.
(a) Explain why evaluating this surface integral using (8) results in an improper integral.
(b) Use (8) to evaluate the integral of f over the surface $\sigma_r : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 < r^2 \le x^2 + y^2 \le 1)$. Take the limit of this result as $r \to 0^+$ to determine the integral of f over σ.
(c) Parametrize σ using spherical coordinates and evaluate the integral of f over σ using (6). Verify that your answer agrees with the result in part (b).

FOCUS ON CONCEPTS

15–18 In some cases it is possible to use Definition 15.5.1 along with symmetry considerations to evaluate a surface integral without reference to a parametrization of the surface. In these exercises, σ denotes the unit sphere centered at the origin.

15. (a) Explain why it is possible to subdivide σ into patches and choose corresponding sample points (x_k^*, y_k^*, z_k^*) such that (i) the dimensions of each patch are as small as desired and (ii) for each sample point (x_k^*, y_k^*, z_k^*), there exists a sample point (x_j^*, y_j^*, z_j^*) with

$$x_k = -x_j, \quad y_k = y_j, \quad z_k = z_j$$

and with $\Delta S_k = \Delta S_j$.
(b) Use Definition 15.5.1, the result in part (a), and the fact that surface integrals exist for continuous functions to prove that $\iint_{\sigma} x^n\, dS = 0$ for n an odd positive integer.

16. Use the argument in Exercise 15 to prove that if $f(x)$ is a continuous odd function of x, and if $g(y, z)$ is a continuous function, then

$$\iint_{\sigma} f(x)g(y, z)\, dS = 0$$

17. (a) Explain why

$$\iint_{\sigma} x^2\, dS = \iint_{\sigma} y^2\, dS = \iint_{\sigma} z^2\, dS$$ (cont.)

(b) Conclude from part (a) that

$$\iint_\sigma x^2\,dS = \frac{1}{3}\left[\iint_\sigma x^2\,dS + \iint_\sigma y^2\,dS + \iint_\sigma y^2\,dS\right]$$

(c) Use part (b) to evaluate

$$\iint_\sigma x^2\,dS$$

without performing an integration.

18. Use the results of Exercises 16 and 17 to evaluate

$$\iint_\sigma (x-y)^2\,dS$$

without performing an integration.

19–20 Set up, but do not evaluate, an iterated integral equal to the given surface integral by projecting σ on (a) the xy-plane, (b) the yz-plane, and (c) the xz-plane. ■

ทำแล้ว **19.** $\iint_\sigma xyz\,dS$, where σ is the portion of the plane $2x+3y+4z=12$ in the first octant.

20. $\iint_\sigma xz\,dS$, where σ is the portion of the sphere $x^2+y^2+z^2=a^2$ in the first octant.

C **21.** Use a CAS to confirm that the three integrals you obtained in Exercise 19 are equal, and find the exact value of the surface integral.

C **22.** Try to confirm with a CAS that the three integrals you obtained in Exercise 20 are equal. If you did not succeed, what was the difficulty?

23–24 Set up, but do not evaluate, two different iterated integrals equal to the given integral. ■

23. $\iint_\sigma xyz\,dS$, where σ is the portion of the surface $y^2=x$ between the planes $z=0$, $z=4$, $y=1$, and $y=2$.

24. $\iint_\sigma x^2y\,dS$, where σ is the portion of the cylinder $y^2+z^2=a^2$ in the first octant between the planes $x=0$, $x=9$, $z=y$, and $z=2y$.

C **25.** Use a CAS to confirm that the two integrals you obtained in Exercise 23 are equal, and find the exact value of the surface integral.

C **26.** Use a CAS to find the value of the surface integral

$$\iint_\sigma x^2yz\,dS$$

where the surface σ is the portion of the elliptic paraboloid $z=5-3x^2-2y^2$ that lies above the xy-plane.

27–28 Find the mass of the lamina with constant density δ_0. ■

27. The lamina that is the portion of the circular cylinder $x^2+z^2=4$ that lies directly above the rectangle $R=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le 4\}$ in the xy-plane.

28. The lamina that is the portion of the paraboloid $2z=x^2+y^2$ inside the cylinder $x^2+y^2=8$.

29. Find the mass of the lamina that is the portion of the surface $y^2=4-z$ between the planes $x=0$, $x=3$, $y=0$, and $y=3$ if the density is $\delta(x,y,z)=y$.

30. Find the mass of the lamina that is the portion of the cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ between $z=1$ and $z=4$ if the density is $\delta(x,y,z)=x^2z$.

31. If a curved lamina has constant density δ_0, what relationship must exist between its mass and surface area? Explain your reasoning.

32. Show that if the density of the lamina $x^2+y^2+z^2=a^2$ at each point is equal to the distance between that point and the xy-plane, then the mass of the lamina is $2\pi a^3$.

33–34 The centroid of a surface σ is defined by

$$\bar{x}=\frac{\iint_\sigma x\,dS}{\text{area of }\sigma},\quad \bar{y}=\frac{\iint_\sigma y\,dS}{\text{area of }\sigma},\quad \bar{z}=\frac{\iint_\sigma z\,dS}{\text{area of }\sigma}$$

Find the centroid of the surface. ■

33. The portion of the paraboloid $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ below the plane $z=4$.

34. The portion of the sphere $x^2+y^2+z^2=4$ above the plane $z=1$.

35–38 Evaluate the integral $\iint_\sigma f(x,y,z)\,dS$ over the surface σ represented by the vector-valued function $\mathbf{r}(u,v)$. ■

35. $f(x,y,z)=xyz$; $\mathbf{r}(u,v)=u\cos v\mathbf{i}+u\sin v\mathbf{j}+3u\mathbf{k}$ $(1\le u\le 2,\ 0\le v\le \pi/2)$

36. $f(x,y,z)=\dfrac{x^2+z^2}{y}$; $\mathbf{r}(u,v)=2\cos v\mathbf{i}+u\mathbf{j}+2\sin v\mathbf{k}$ $(1\le u\le 3,\ 0\le v\le 2\pi)$

37. $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$; $\mathbf{r}(u,v)=u\cos v\mathbf{i}+u\sin v\mathbf{j}+u^2\mathbf{k}$ $(0\le u\le \sin v,\ 0\le v\le \pi)$

38. $f(x,y,z)=e^{-z}$; $\mathbf{r}(u,v)=2\sin u\cos v\mathbf{i}+2\sin u\sin v\mathbf{j}+2\cos u\mathbf{k}$ $(0\le u\le \pi/2, 0\le v\le 2\pi)$

C **39.** Use a CAS to approximate the mass of the curved lamina $z=e^{-x^2-y^2}$ that lies above the region in the xy-plane enclosed by $x^2+y^2=9$ given that the density function is $\delta(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$.