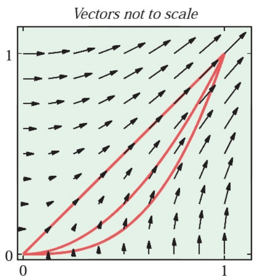
4.2 ความเป็นอิสระจากวิถีของปริพันธ์ตามเส้น (Independence of Path)

โดยทั่วไปค่าของปริพันธ์ตามเส้น $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ จะขึ้นอยู่กับเส้นโค้ง C แต่อย่างไรก็ตามในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นว่าเมื่อตัวถูกหาค่าปริพันธ์สอดคล้องกับเงื่อนไขที่เหมาะสม ค่าของปริพันธ์จะขึ้นอยู่กับจุดปลายของเส้นโค้ง C เท่านั้นไม่ขึ้นอยู่กับรูปร่างของเส้นโค้งที่เชื่อมจุดปลาย ในกรณีนี้การหาค่าปริพันธ์ตามเส้นจะทำได้ง่าย

<u>ความเป็นอิสระจากวิถี</u> พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 4.2.1</u> กำหนดให้ $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} + x\vec{j}$ จงหาค่าปริพันธ์ตามเส้น



$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C ydx + xdy$$

บนเส้นโค้งต่อไปนี้ (ดูรูปที่ 18.2.1)

(a) เป็นส่วนของเส้นตรง $y = x$ จากจุด $(0,0)$ ไปยัง $(1,1)$

(b) เป็นพาราโบลา $y = x^2$ จากจุด $(0,0)$ ไปยัง $(1,1)$

(c) เป็นลูกบาศก์ $y = x^3$ จากจุด $(0,0)$ ไปยัง $(1,1)$

<u>วิธีทำ</u> (a) ด้วยตัวแปรเสริม $x = t$ วิถีของปริพันธ์จะกำหนดโดย $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j}$ $(0 \le t \le 1)$ หรือ ในรูปตัวแปรเสริม $x = t,\ \ y = t$ $(0 \le t \le 1)$ เนื่องจาก $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} + x\vec{j}$ จะได้ $\vec{F}(x,y) = \vec{F}\left(x(t),y(t)\right) = t\vec{i} + t\vec{j}$ ดังนั้น

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left[\vec{F}\left(x(t),y(t)\right)\cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right]dt = \int_0^1 (t\vec{i} + t\vec{j})\cdot(\vec{i} + \vec{j})dt$$

$$= \int_0^1 2tdt = 1$$

(b) ด้วยตัวแปรเสริม $x = t$ วิถีของปริพันธ์จะกำหนดโดย $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$ $(0 \le t \le 1)$ และ $\vec{F}\left(x(t),y(t)\right) = t^2\vec{i} + t\vec{j}$ ดังนั้น

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left[\vec{F}\left(x(t),y(t)\right)\cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right]dt = \int_0^1 (t^2\vec{i} + t\vec{j})\cdot(\vec{i} + 2t\vec{j})dt$$

$$= \int_0^1 3t^2dt = 1$$

(c) ด้วยตัวแปรเสริม $x = t$ วิถีของปริพันธ์จะกำหนดโดย $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^3\vec{j}$ $(0 \le t \le 1)$ และ $\vec{F}\left(x(t),y(t)\right) = t^3\vec{i} + t\vec{j}$ ดังนั้น

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left[\vec{F}\left(x(t),y(t)\right)\cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right]dt = \int_0^1 (t^3\vec{i} + t\vec{j})\cdot(\vec{i} + 3t^2\vec{j})dt$$

$$= \int_0^1 4t^3dt = 1$$

☑

ตัวอย่าง 4.2.2 กำหนดให้ $\vec{F}(x,y) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j}$ จงหาค่าปริพันธ์ตามเส้น

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C xy^2dx + x^2ydy$$

บนเส้นโค้งต่อไปนี้

(a) เป็นส่วนของเส้นตรง $y = 2x$ จากจุด $(0,0)$ ไปยัง $(2,4)$

(b) เป็นพาราโบลา $y = x^2$ จากจุด $(0,0)$ ไปยัง $(2,4)$

จากตัวอย่าง 4.2.1 จะเห็นว่าค่าของปริพันธ์ตามเส้นเป็นค่าเดียวกัน แม้ว่าจะหาปริพันธ์บนวิถีที่แตกต่างกันสามวิถีจากจุด $(0,0)$ ไปยังจุด $(1,1)$ ซึ่งไม่ใช่เหตุบังเอิญ เนื่องจากตามทฤษฎีบทที่เรียกว่า<u>ทฤษฎีบทพื้นฐานของปริพันธ์ตามเส้น</u> จะแสดงสำหรับกรณีนี้เนื่องจาก $\vec{F}(x,y)=y\vec{i}+x\vec{j}$ เป็นเกรเดียนต์ของฟังก์ชัน ϕ [$\vec{F}(x,y)=\nabla\phi$ เมื่อ $\phi(x,y)=xy$]

• เราจะกล่าวว่าฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbb{F}$ เป็น "ฟังก์ชันอนุรักษ์" (conservative function) ถ้ามีฟังก์ชัน ϕ ที่ทำให้

$$\mathbb{F}(x,y) = \nabla\phi(x,y)$$

ϕ ฟังก์ชันศักย์ (potential)

หรือ $\boxed{\text{หาเจอฟังก์ชันศักย์ } \phi \text{ ที่ทำให้ } \mathbb{F}(x,y) = \frac{\partial\phi}{\partial x} i + \frac{\partial\phi}{\partial y} j}$

ทฤษฎีบท: [The Fundamental Theorem of Line Integrals] (FTLI)

สมมติให้

$$\mathbb{F}(x,y) = f(x,y)i + g(x,y)j$$

① เป็นฟังก์ชันอนุรักษ์บนบางบริเวณ D ที่มีจุด (x_0,y_0) และ (x_1,y_1)

② และ $f(x,y)$ และ $g(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D

ถ้า

$$\mathbb{F}(x,y) = \nabla\phi(x,y)$$

และ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงๆ บน D โดยเริ่มต้นที่จุด (x_0,y_0) และสิ้นสุดที่ (x_1,y_1) แล้ว

$$\int_C \mathbb{F}(x,y)\cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1,y_1) - \phi(x_0,y_0)$$

[illegible] (FTLI)

$$\boxed{\text{If } \mathbb{F} \text{ is conservative, then } \int_C \mathbb{F}(x,y)\cdot d\mathbb{r} = \phi(x_1,y_1) - \phi(x_0,y_0).}$$

*

<u>ตัวอย่าง 4.2.3</u> $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} + x\vec{j}$ เป็นฟังก์ชันอนุรักษ์ในระนาบ xy เนื่องจากเป็นเกรเดียนต์ของ $\phi(x,y) = xy$ ดังนั้นสำหรับเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ๆ C ใด ๆ ที่เดินจาก $(0,0)$ ไปยัง $(1,1)$ จะได้ว่า

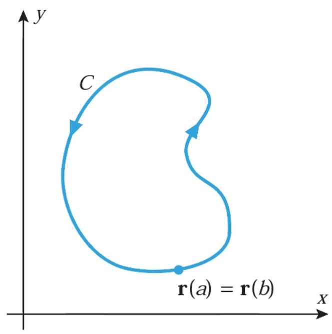
$$\int_C ydx + xdy = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(1,1) - \phi(0,0) = 1 - 0 = 1$$

ซึ่งได้คำตอบตรงกับตัวอย่าง 4.2.1 ☑

<u>ตัวอย่าง 4.2.4</u> $\vec{F}(x,y) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j}$ เป็นฟังก์ชันอนุรักษ์ในระนาบ xy เนื่องจากเป็นเกรเดียนต์ของ $\phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2$ ดังนั้นสำหรับเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ๆ C ใด ๆ ที่เดินจาก $(0,0)$ ไปยัง $(2,4)$ จะได้ว่า

$$\int_C xy^2dx + x^2ydy = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(2,4) - \phi(0,0) = 32 - 0 = 32$$

ซึ่งได้คำตอบตรงกับตัวอย่าง 4.2.2 ☑



เส้นโค้ง C ที่กำหนดโดย $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}\quad(a\le t\le b)$ จะกล่าวว่าเป็นเส้นโค้งปิด (closed curve)(ดูรูปที่18.2.2) ถ้าจุดเริ่มต้น $\vec{r}(a)=(x_0,y_0)$ และจุดปลาย $\vec{r}(b)=(x_1,y_1)$ เป็นจุดเดียวกัน (ดูรูป18.2.2) ปริพันธ์ตามเส้นบนเส้นโค้งเรียบปิดไม่ต้องการเทคนิคในการคำนวณค่าใหม่ แต่อย่างไรก็ตาม ถ้า $\vec{F}(x,y)=f(x,y)\vec{i}+g(x,y)\vec{j}$ เป็นเกรเดียนต์ของ $\phi(x,y)$ แล้วจากทฤษฎีบทพื้นฐานของปริพันธ์ตามเส้น จะได้ว่า

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C f(x,y)dx+g(x,y)dy=\phi(x_1,y_1)-\phi(x_0,y_0)=0$$

ดังนั้น จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบท 4.2.2</u> สมมุติว่า $\vec{F}(x,y)=f(x,y)\vec{i}+g(x,y)\vec{j}$ โดยที่ f และ g ต่อเนื่องในบริเวณเปิดบางบริเวณ ถ้า $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันอนุรักษ์ในบริเวณนั้น แล้ว

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$$

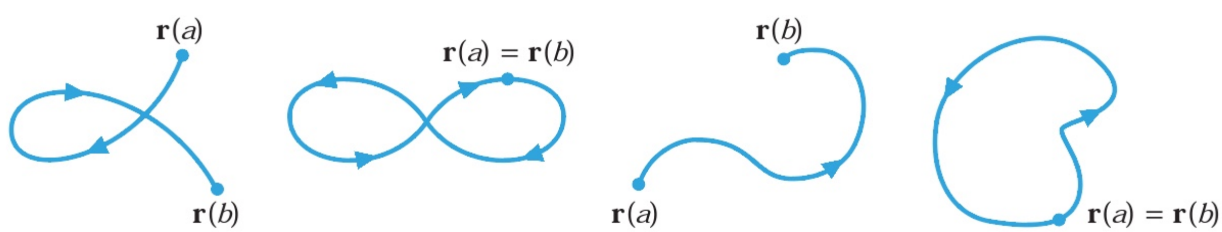
สำหรับทุก ๆ เส้นโค้งเรียบเป็นส่วน ๆ ปิด Cใ นบริเวณ ทฤษฎีบท 4.2.1 ทำให้เกิดคำถามพื้นฐานสองคำถามซึ่งจะต้องมีคำตอบ ถ้าจะให้สูตร

$$\int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}=\phi(x_1,y_1)-\phi(x_0,y_0)$$

มีค่าต่อการคำนวณ

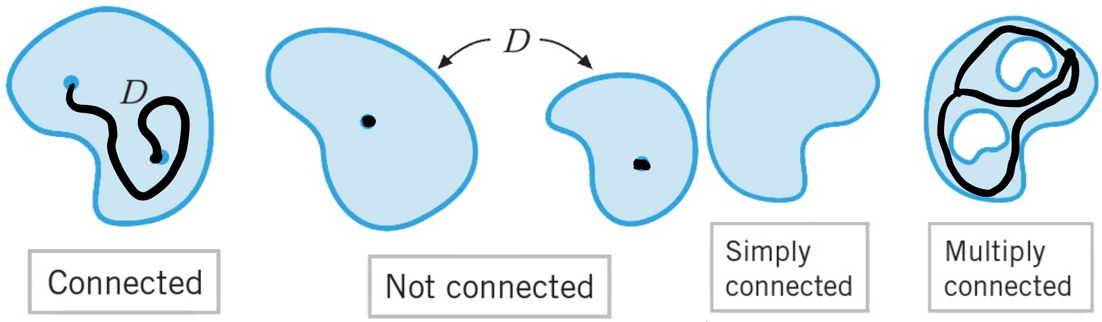
- จะรู้ได้อย่างไรว่าฟังก์ชันต่อเนื่อง $\vec{F}(x,y)=f(x,y)\vec{i}+g(x,y)\vec{j}$ เป็นเกรเดียนต์ของฟังก์ชัน $\phi(x,y)$ บางฟังก์ชัน
- ถ้ารู้ว่า $\vec{F}(x,y)$ เป็นเกรเดียนต์ของฟังก์ชัน $\phi(x,y)$ บางฟังก์ชัน แล้วจะหาฟังก์ชัน ϕ ได้อย่างไร

การหาคำตอบของคำถามทั้งสองนี้ ต้องการศัพท์เฉพาะบางคำ เส้นโค้งบนระนาบ $\vec{r}=\vec{r}(t)$ $(a\le t\le b)$ จะกล่าวว่าเป็น<u>เส้นโค้งอย่างง่าย</u> (simple curve) ถ้าเส้นโค้งนั้นไม่ตัดตัวเองที่จุดใด ๆ ซึ่งอยู่ระหว่างจุดปลายทั้งสอง ตัวอย่างของเส้นโค้งอย่างง่ายหรือไม่เป็นเส้นโค้งอย่างง่าย และเส้นโค้งปิดหรือไม่เป็นเส้นโค้งปิด (ดูรูปที่18.2.3)



Not simple and not closed | Closed but not simple | Simple but not closed | Simple and closed

บริเวณในระนาบที่มีขอบเป็นเส้นโค้งอย่างง่ายปิดเพียงเส้นโค้งเดียวเรียกว่าบริเวณเชื่อมโยงอย่างง่าย (simply connected region) ดังแสดงในรูปที่ 18.2.4 บริเวณต่อเนื่องอย่างง่ายจะไม่แยกเป็นสองบริเวณหรือมากกว่านั้นและไม่รู



ระนาบทั้งหมด(ซึ่งไม่มีขอบถือว่าเป็นบริเวณเชื่อมโยงอย่างง่าย) ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยบอกให้ทราบว่าเมื่อไร $\vec{F}(x,y)$ จะเป็นฟังก์ชันอนุรักษ์

[Conservative Test]

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$

ทฤษฎีบท 4.2.3 ให้ $\vec{F}(x,y) = f(x,y)\vec{i} + g(x,y)\vec{j}$ โดยที่ f และ g มีอนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่องในบริเวณเชื่อมโยงอย่างง่าย จะได้ว่า $\vec{F}(x,y)$ เป็นเกรเดียนต์ของฟังก์ชัน ϕ บางฟังก์ชันบนบริเวณนั้น ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

ที่แต่ละจุดในบริเวณ

$F(x,y) = f(x,y)i + g(x,y)j$

$$\boxed{\mathbb{F} \text{ is conservative} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}}$$

[มี ϕ ที่ $\mathbb{F} = \nabla\phi$]

สรุป! จะหา $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$ โดยใช้ FTLI ต้องมี

① Check! conservativeness of $\mathbb{F}$ $\left[\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}\right]$

② หา ϕ : จาก $\mathbb{F} = \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j$

⇒ Integrate $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ เทียบ x ⇒ ฟังก์ชันของ y [มี $k(y)$]

⇒ Diff. ฟังก์ชันเมื่อกี้เทียบ y ⇒ เทียบพจน์หา $k'(y)$

⇒ Integrate $k'(y)$ ⇒ ได้ $k(y)$ ⇒ ตอบ

ตัวอย่าง 4.2.5 จงแสดงว่า $\vec{F}(x,y) = 2xy^3\vec{i} + (1+3x^2y^2)\vec{j}$ เป็นเกรเดียนต์ของฟังก์ชัน ϕ บางฟังก์ชันบนระนาบ xy ทั้งหมด และจงหาฟังก์ชัน ϕ

วิธีทำ ① Check!: Conservativeness of $\mathbb{F}$

จาก $\mathbb{F}(x,y) = \underbrace{2xy^3}_{f(x,y)}\,i + \underbrace{(1+3x^2y^2)}_{g(x,y)}\,j$

พิจารณา $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial(2xy^3)}{\partial y} = 6xy^2$

และ $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial(1+3x^2y^2)}{\partial x} = 6xy^2$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ จึงได้ว่า $\mathbb{F}$ เป็นฟังก์ชันอนุรักษ์ (conservative)

จะเป็น $\mathbb{F} = \nabla\phi$ สำหรับบางฟังก์ชัน ϕ

② หา ϕ:

จาก $\mathbb{F}(x,y) = \nabla\phi$

$\rightarrow \quad = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}i + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}j$ ✓ $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}, \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = ?$

จาก $\mathbb{F}(x,y) = 2xy^3 i + (1+3x^2y^2)j$ ✓ จะได้ว่า

$\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy^3$ ✓ และ $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = 1+3x^2y^2$

หาปริพันธ์ $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$ เทียบตัวแปร x จะได้

$$\phi(x,y) = \int \frac{\partial\phi}{\partial x}dx = \int(2xy^3)\,dx = x^2y^3 + K(y) \quad (*)$$

พิจารณาหา $K(y)$ ดังนี้

เนื่องจาก $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 1 + 3x^2y^2$

จาก ⊛ จะได้ว่า

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3x^2y^2 + K'(y)$$

นั่นคือ

$$1 + 3x^2y^2 = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 3x^2y^2 + K'(y)$$

$$\Rightarrow \quad K'(y) = 1$$

เพราะฉะนั้น

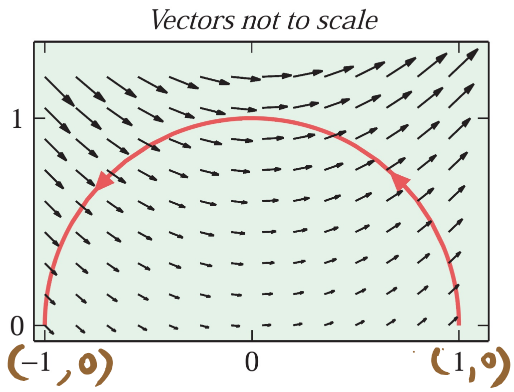
$$K(y) = \int K'(y)\,dy = \int 1\,dy = y + C$$

ดังนั้น จาก ⊛ จะได้ว่า

$$\phi(x,y) = x^2y^3 + K(y)$$
$$= x^2y^3 + y + C$$

ตัวอย่าง 4.2.8 อนุภาคเคลื่อนที่ไปบนครึ่งวงกลม C ซึ่งมีสมการเป็น $\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}$ $(0\le t\le \pi)$ ด้วยแรง $\vec{F}(x,y)=e^{y}\vec{i}+xe^{y}\vec{j}$ จงหางานที่ได้

$$W=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$



$$\mathbf{r}(t)=\underbrace{\cos t}_{x(t)}\,i+\underbrace{\sin t}_{y(t)}\,j \;;\quad 0\le t\le \pi$$

$$\mathbf{F}(x,y)=e^{\sin t}\,i+(\cos t)e^{\sin t}\,j$$

$$\Rightarrow W=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_C \left(e^{\sin t}\,i+e^{\sin t}\cos t\,j\right)\cdot\left(-\sin t\,i+\cos t\,j\right)dt$$

$$=\int_C\left(-\sin t\,e^{\sin t}+(\cos^2 t)e^{\sin t}\right)dt \quad \#$$

Ask! The fundamental Theorem of line integral

① check: conservative? $\left[\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}\right]$

② หา ϕ : จาก $\mathbf{F}=\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}i+\frac{\partial\phi}{\partial y}j$

③ $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\phi(-1,0)-\phi(1,0)$

① จาก $\mathbf{F}(x,y)=\underbrace{e^{y}}_{f(x,y)}i+\underbrace{xe^{y}}_{g(x,y)}j$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{y} \;=\!=\!=\; e^{y}=\frac{\partial g}{\partial x}\Rightarrow \mathbf{F}\text{ is conservative.}$$

② หา ϕ : KNOW! $\mathbb{F}(x,y) = e^y i + xe^y j$

จาก $\mathbb{F}(x,y) = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} i + \frac{\partial\phi}{\partial y} j$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = e^y \qquad$ และ $\quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = xe^y$

หาปริพันธ์ของ $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ เทียบ x จะได้

$$\phi(x,y) = \int e^y dx = xe^y + K(y) \quad \text{—} (*)$$

ซึ่งหาอนุพันธ์ย่อยเทียบ y จะได้

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = xe^y + K'(y)$$

แต่เราทราบว่า $\frac{\partial\phi}{\partial y} = xe^y$

นั่นคือ $K'(y) = 0 \Rightarrow K(y) = 0 + C = C$

เพราะฉะนั้น $\phi(x,y) = xe^y + C$

③ ดังนั้น

$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \phi(-1,0) - \phi(1,0)$$

$$= -e^0 - e^0 = -1 - 1$$

$$= -2 \qquad \square$$

✔ QUICK CHECK EXERCISES 15.3 (See page 1121 for answers.)

1. If C is a piecewise smooth curve from $(1, 2, 3)$ to $(4, 5, 6)$, then
$$\int_C dx + 2\,dy + 3\,dz = \_\_\_\_\_\_$$

2. If C is the portion of the circle $x^2 + y^2 = 1$ where $0 \le x$, oriented counterclockwise, and $f(x, y) = ye^x$, then
$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \_\_\_\_\_\_$$

3. A potential function for the vector field
$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + (xz + z)\mathbf{j} + (xy + y + 1)\mathbf{k}$$
is $\phi(x, y, z) = \_\_\_\_\_\_$.

4. If a, b, and c are nonzero real numbers such that the vector field $x^5 y^a \mathbf{i} + x^b y^c \mathbf{j}$ is a conservative vector field, then

$a = \_\_\_\_\_\_$, $b = \_\_\_\_\_\_$, $c = \_\_\_\_\_\_$

EXERCISE SET 15.3 [C] CAS

1–6 Determine whether $\mathbf{F}$ is a conservative vector field. If so, find a potential function for it. ■

1. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

2. $\mathbf{F}(x, y) = 3y^2\mathbf{i} + 6xy\mathbf{j}$

3. $\mathbf{F}(x, y) = x^2 y\mathbf{i} + 5xy^2\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y\mathbf{i} - e^x \sin y\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = (\cos y + y\cos x)\mathbf{i} + (\sin x - x\sin y)\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = x\ln y\mathbf{i} + y\ln x\mathbf{j}$

7. In each part, evaluate $\int_C 2xy^3\,dx + (1 + 3x^2y^2)\,dy$ over the curve C, and compare your answer with the result of Example 5.

(a) C is the line segment from $(1, 4)$ to $(3, 1)$.

(b) C consists of the line segment from $(1, 4)$ to $(1, 1)$, followed by the line segment from $(1, 1)$ to $(3, 1)$.

8. (a) Show that the line integral $\int_C y\sin x\,dx - \cos x\,dy$ is independent of the path.

(b) Evaluate the integral in part (a) along the line segment from $(0, 1)$ to $(\pi, -1)$.

(c) Evaluate the integral $\int_{(0,1)}^{(\pi,-1)} y\sin x\,dx - \cos x\,dy$ using Theorem 15.3.1, and confirm that the value is the same as that obtained in part (b).

9–14 Show that the integral is independent of the path, and use Theorem 15.3.1 to find its value. ■ m ϕ

9. $\displaystyle\int_{(1,2)}^{(4,0)} 3y\,dx + 3x\,dy$

10. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,\pi/2)} e^x \sin y\,dx + e^x \cos y\,dy$

11. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(3,2)} 2xe^y\,dx + x^2e^y\,dy$

12. $\displaystyle\int_{(-1,2)}^{(0,1)} (3x - y + 1)\,dx - (x + 4y + 2)\,dy$

13. $\displaystyle\int_{(2,-2)}^{(-1,0)} 2xy^3\,dx + 3y^2x^2\,dy$

14. $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(3,3)} \left(e^x \ln y - \frac{e^y}{x}\right)dx + \left(\frac{e^x}{y} - e^y \ln x\right)dy$, where x and y are positive.

15–18 Confirm that the force field $\mathbf{F}$ is conservative in some open connected region containing the points P and Q, and then find the work done by the force field on a particle moving along an arbitrary smooth curve in the region from P to Q. ■

15. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$; $P(1, 1)$, $Q(0, 0)$

16. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + 3x^2y^2\mathbf{j}$; $P(-3, 0)$, $Q(4, 1)$

17. $\mathbf{F}(x, y) = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j}$; $P(-1, 1)$, $Q(2, 0)$

18. $\mathbf{F}(x, y) = e^{-y}\cos x\mathbf{i} - e^{-y}\sin x\mathbf{j}$; $P(\pi/2, 1)$, $Q(-\pi/2, 0)$

19–22 True–False Determine whether the statement is true or false. Explain your answer. ■

19. If $\mathbf{F}$ is a vector field and there exists a closed curve C such that $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$, then $\mathbf{F}$ is conservative.

20. If $\mathbf{F}(x, y) = ay\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$ is a conservative vector field, then $a = b$.

21. If $\phi(x, y)$ is a potential function for a constant vector field, then the graph of $z = \phi(x, y)$ is a plane.

22. If $f(x, y)$ and $g(x, y)$ are differentiable functions defined on the xy-plane, and if $f_y(x, y) = g_x(x, y)$ for all (x, y), then there exists a function $\phi(x, y)$ such that $\phi_x(x, y) = f(x, y)$ and $\phi_y(x, y) = g(x, y)$.

23–24 Find the exact value of $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ using any method. ■

23. $\mathbf{F}(x, y) = (e^y + ye^x)\mathbf{i} + (xe^y + e^x)\mathbf{j}$
$C: \mathbf{r}(t) = \sin(\pi t/2)\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} \quad (1 \le t \le 2)$

24. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + \cos y)\mathbf{j}$
$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\cos(t/3)\mathbf{j} \quad (0 \le t \le \pi)$

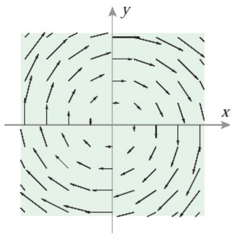
[C] **25.** Use the numerical integration capability of a CAS or other calculating utility to approximate the value of the integral in Exercise 23 by direct integration. Confirm that the numerical approximation is consistent with the exact value.

[C] **26.** Use the numerical integration capability of a CAS or other calculating utility to approximate the value of the integral in Exercise 24 by direct integration. Confirm that the numerical approximation is consistent with the exact value.

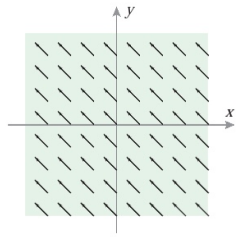
FOCUS ON CONCEPTS

27–28 Is the vector field conservative? Explain.

27.



28.



29. Suppose that C is a circle in the domain of a conservative nonzero vector field in the xy-plane whose component functions are continuous. Explain why there must be at least two points on C at which the vector field is normal to the circle.

30. Does the result in Exercise 29 remain true if the circle C is replaced by a square? Explain.

Jum!

31. Prove: If

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

is a conservative field and f, g, and h are continuous and have continuous first partial derivatives in a region, then

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y}$$

in the region.

32. Use the result in Exercise 31 to show that the integral

$$\int_C yz\,dx + xz\,dy + yx^2\,dz$$

is not independent of the path.

33. Find a nonzero function h for which

$$\mathbf{F}(x, y) = h(x)[x \sin y + y \cos y]\mathbf{i} + h(x)[x \cos y - y \sin y]\mathbf{j}$$

is conservative.

34. (a) In Example 3 of Section 15.1 we showed that

$$\phi(x, y) = -\frac{c}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

is a potential function for the two-dimensional inverse-square field

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{c}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

but we did not explain how the potential function $\phi(x, y)$ was obtained. Use Theorem 15.3.3 to show that the two-dimensional inverse-square field is conservative everywhere except at the origin, and then use the method of Example 4 to derive the formula for $\phi(x, y)$.

(b) Use an appropriate generalization of the method of Example 4 to derive the potential function

$$\phi(x, y, z) = -\frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

for the three-dimensional inverse-square field given by Formula (5) of Section 15.1.

35–36 Use the result in Exercise 34(b).

35. In each part, find the work done by the three-dimensional inverse-square field

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

on a particle that moves along the curve C.

(a) C is the line segment from $P(1, 1, 2)$ to $Q(3, 2, 1)$.

(b) C is the curve

$$\mathbf{r}(t) = (2t^2 + 1)\mathbf{i} + (t^3 + 1)\mathbf{j} + (2 - \sqrt{t})\mathbf{k}$$

where $0 \le t \le 1$.

(c) C is the circle in the xy-plane of radius 1 centered at $(2, 0, 0)$ traversed counterclockwise.

36. Let $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} - \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$.

(a) Show that

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \ne \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

if C_1 and C_2 are the semicircular paths from $(1, 0)$ to $(-1, 0)$ given by

$$C_1 : x = \cos t, \quad y = \sin t \qquad (0 \le t \le \pi)$$
$$C_2 : x = \cos t, \quad y = -\sin t \qquad (0 \le t \le \pi)$$

(b) Show that the components of $\mathbf{F}$ satisfy Formula (9).

(c) Do the results in parts (a) and (b) contradict Theorem 15.3.3? Explain.

37. Prove Theorem 15.3.1 if C is a piecewise smooth curve composed of smooth curves $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

38. Prove that (*b*) implies (*c*) in Theorem 15.3.2. [*Hint:* Consider any two piecewise smooth oriented curves C_1 and C_2 in the region from a point P to a point Q, and integrate around the closed curve consisting of C_1 and $-C_2$.]

39. Complete the proof of Theorem 15.3.2 by showing that $\partial\phi/\partial y = g(x, y)$, where $\phi(x, y)$ is the function in (7).

40. **Writing** Describe the different methods available for evaluating the integral of a conservative vector field over a smooth curve.

41. **Writing** Discuss some of the ways that you can show a vector field is *not* conservative.

✔ QUICK CHECK ANSWERS 15.3

1. 18 **2.** 2 **3.** $xyz + yz + z$ **4.** 6, 6, 5