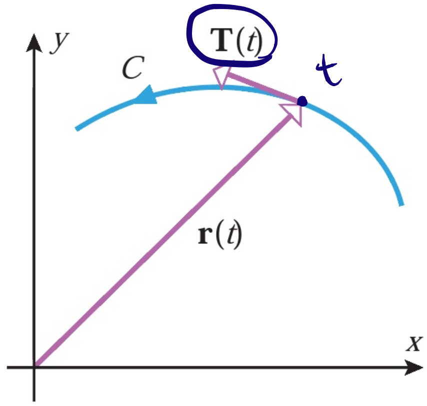
3.7 เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยและเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย
(Unit tangent Vectors and Unit Normal Vectors)



• ถ้า C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบ (smooth) ที่กำหนดโดยฟังก์ชัน
$r(t)$
บนช่วง I ใดๆ เรานิยาม
"เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย"
(Unit tangent Vector)
ที่สัมผัส C ณ จุด t โดย

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$$

$T(2)$

ตัวอย่าง: จงหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย (unit tangent vector) ที่สัมผัสเส้นโค้ง C ที่กำหนดโดยฟังก์ชัน

$$r(t) = t^2 i + t^3 j \quad ณ \quad t = 2$$

$\Rightarrow r'(t) = ?$
$\Downarrow$
$r'(2) = ?$
$\Rightarrow \|r'(2)\| = ?$

วิธีทำ จาก $r(t) = t^2 i + t^3 j$

จะได้

$$r'(t) = 2ti + 3t^2 j$$

และ

$$\|r'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}$$

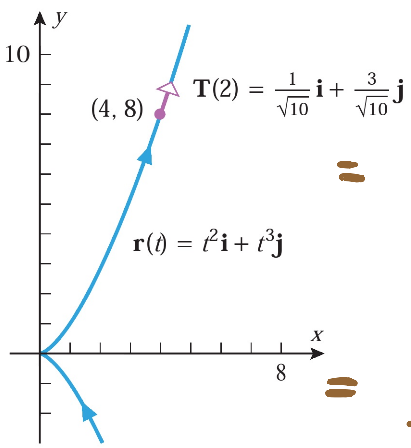
$$= \sqrt{4t^2 + 9t^4}$$

นั่นคือ $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$

$$= \frac{2t\mathbf{i}+3t\mathbf{j}}{\sqrt{4t^2+9t^4}}$$

เพราะฉะนั้น ณ $t = 2$ จะได้ว่า

$$\mathbf{T}(2) = \frac{2(2)}{\sqrt{4(2)^2+9(2)^4}}\mathbf{i} + \frac{3(2)}{\sqrt{4(2)^2+9(2)^4}}\mathbf{j}$$



$$= \frac{4}{\sqrt{160}}\mathbf{i} + \frac{12}{\sqrt{160}}\mathbf{j}$$

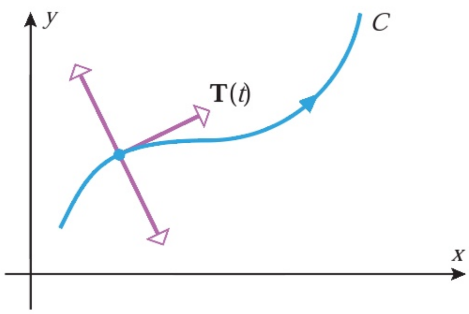
$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j} \qquad \square$$

• ให้ C เส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชัน $\mathbf{r}(t)$ และ $\mathbf{r}'(t)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ [$\mathbf{r}'(t)$ exists] เราจะนิยาม "เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย" (Unit normal vector) ณ t โดย

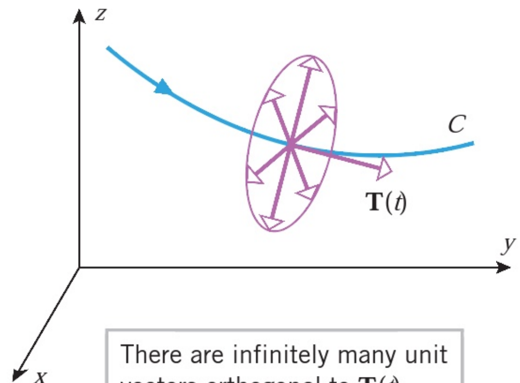
$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

[$\mathbf{N}(t)$ ตั้งฉากกับ $\mathbf{T}(t)$]

In 2-space there are two unit vectors that are orthogonal to $\mathbf{T}(t)$, and in 3-space there are infinitely many such vectors (Figure 12.4.3). In both cases the principal unit normal is that particular normal that points in the direction of $\mathbf{T}'(t)$. After the next example we will show that for a nonlinear parametric curve in 2-space the principal unit normal is the one that points "inward" toward the concave side of the curve.



There are two unit vectors orthogonal to $\mathbf{T}(t)$.

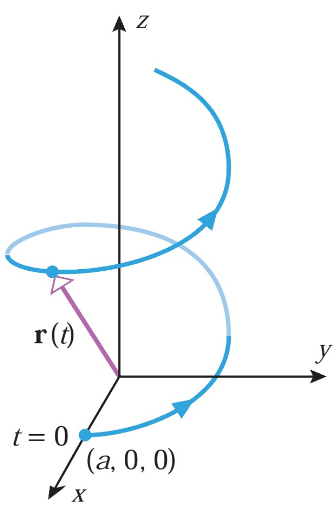


There are infinitely many unit vectors orthogonal to $\mathbf{T}(t)$.

ตัวอย่าง : จงหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย $T(t_0)$ และเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย $N(t_0)$ ที่สัมผัสเกลียวเส้นวงกลม (circular helix)

$x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = ct \qquad (a > 0)$

ณ จุด $t = t_0$



$\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$

① หา $T(t_0)$

พิจารณา $r(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j + ct\, k$

$\Rightarrow r'(t) = -a\sin t\, i + a\cos t\, j + ck$

และ

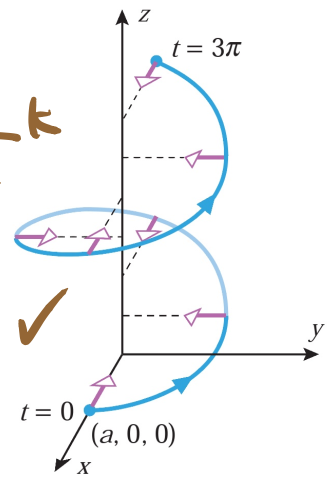
$\|r'(t)\| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + c^2}$

$= \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + c^2} = \sqrt{a^2+c^2}$

ดังนั้น เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย ณ $t = t_0$ คือ

$T(t_0) = \dfrac{r'(t_0)}{\|r'(t_0)\|} = \dfrac{-a\sin t_0}{\sqrt{a^2+c^2}} i + \dfrac{a\cos t_0}{\sqrt{a^2+c^2}} j + \dfrac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} k$

@ $N(t_0)$ $\left[\dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|} \right]$



$$T(t) = \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+c^2}}\,i + \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}\,j + \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\,k$$

$$T'(t) = -\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}\,i - \frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+c^2}}\,j + 0k \quad ✓$$

✓ $N(t) = -(\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j})$

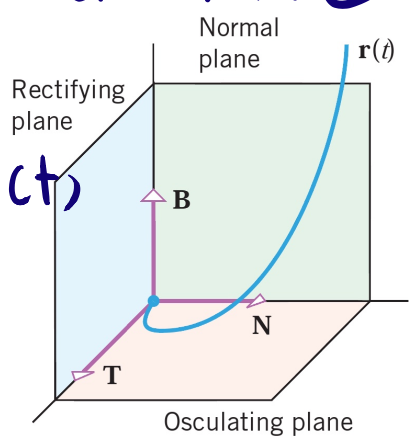
และ:

$$\|T'(t)\| = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

ดังนั้น

$$N(t_0) = \frac{T'(t_0)}{\|T'(t_0)\|} = -\cos t_0\, i - \sin t_0\, j \qquad \square$$

• กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชัน $r(t)$ เรานิยาม "เวกเตอร์ตั้งฉากคู่" (Binormal vector) ที่สัมผัส C ณ จุด t โดย



$$B(t) = T(t) \times N(t)$$

[Note! $\|B(t)\| = \|T(t) \times N(t)\|$

$$= \|T(t)\|\,\|N(t)\| \sin\theta$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad]$$

__ตัวอย่าง__ : จงหาเวกเตอร์คู่แนวฉาก (binormal vector) ที่สัมผัสเส้นโค้ง ที่กำหนดให้

$$r(t) = e^{t}\sin t\, i + e^{t}\cos t\, j + k$$

[$B(t) = T(t) \times N(t)$]

__สมมติ!__ $T(t) = \dfrac{(\cos t + \sin t)}{\sqrt{2}} i + \dfrac{(\cos t - \sin t)}{\sqrt{2}} j$

$$N(t) = \frac{(\cos t - \sin t)}{\sqrt{2}} i - \frac{(\sin t + \cos t)}{\sqrt{2}} j$$

จะได้

$$B(t) = T(t) \times N(t)$$

$$= \left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{2}} & \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{2}} & \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}} \\ \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}} & \frac{-\sin t - \cos t}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}} & \frac{-\sin t - \cos t}{\sqrt{2}} \end{array}\right|$$

$$= -\frac{(\sin t + \cos t)^2}{2} k - \frac{(\cos t - \sin t)^2}{2} k$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\sin^2 t \cancel{- 2\sin t\cos t} - \cos^2 t - \cos^2 t \cancel{+ 2\sin t\cos t} - \sin^2 t\right] k$$

$$= \frac{-2(\sin^2 t + \cos^2 t)}{2} k = -k$$

3.8 ความโค้งและรัศมีความโค้ง (Curvature and Radius of Curvature)

- กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชัน $r(t)$ และถ้า $r''(t)$ หาค่าได้ แล้ว ความโค้งของ C (curvature) นิยามโดย

$$\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|r'(t)\|} \quad \left[= \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} \right]$$

ตัวอย่าง: จงหาความโค้งของวงกลมที่มีรัศมีสองหน่วยและจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0)

วิธีทำ เขียนสมการวงกลมที่มีรัศมี 2 หน่วยและจุดศูนย์กลาง (0,0)

$$r(t) = 2\cos t\, i + 2\sin t\, j \qquad \left(\frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow$