

บทที่ 3

Vector-Valued Functions

3.1 เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมในสามมิติ

C : curve

$$\mathbf{r}(t); x(t), y(t), z(t)$$

Example: กำหนดให้สมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = 1-t, y = 3t, z = 2t$$

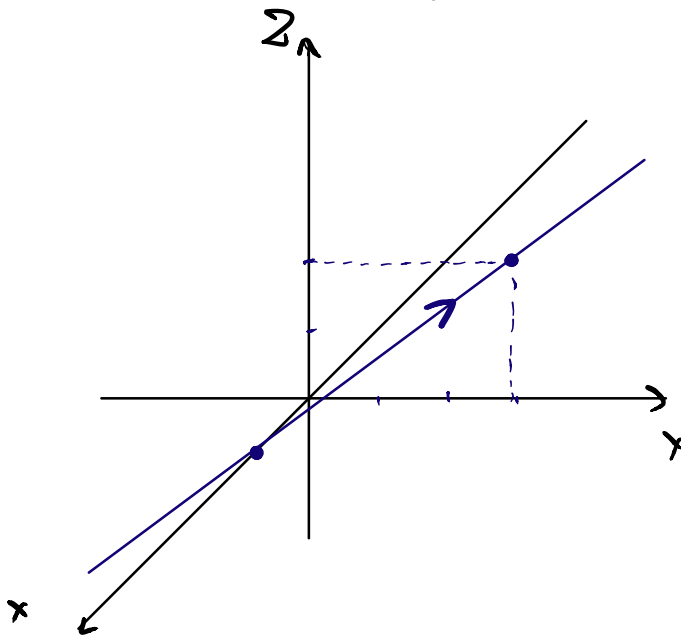
จงวาดกราฟ

วิธีทำ: เมื่อ $t=0$;

$$x = 1, y = 0, z = 0$$

$$t = 1;$$

$$x = 0, y = 3, z = 2$$

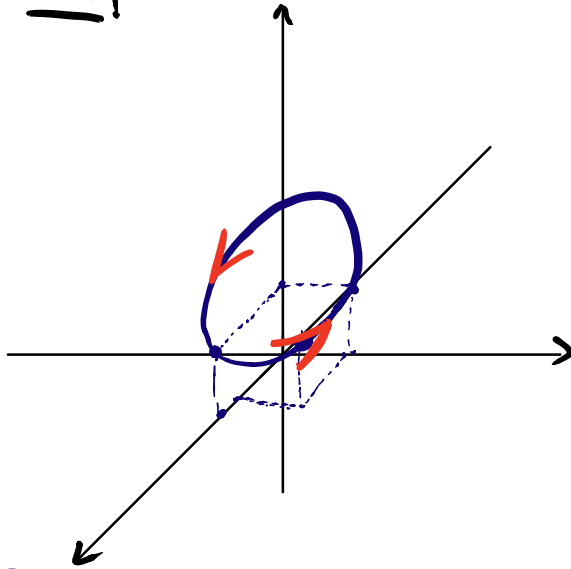


• Direction of increasing parameter

Example: วงกลมในระนาบ xy ที่รัศมี 1

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 1$$

ตัวอย่าง



$$t = 0;$$

$$x = \cos 0 = 1, y = \sin 0 = 0,$$

$$z = 1$$

$$t = \frac{\pi}{4};$$

$$x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

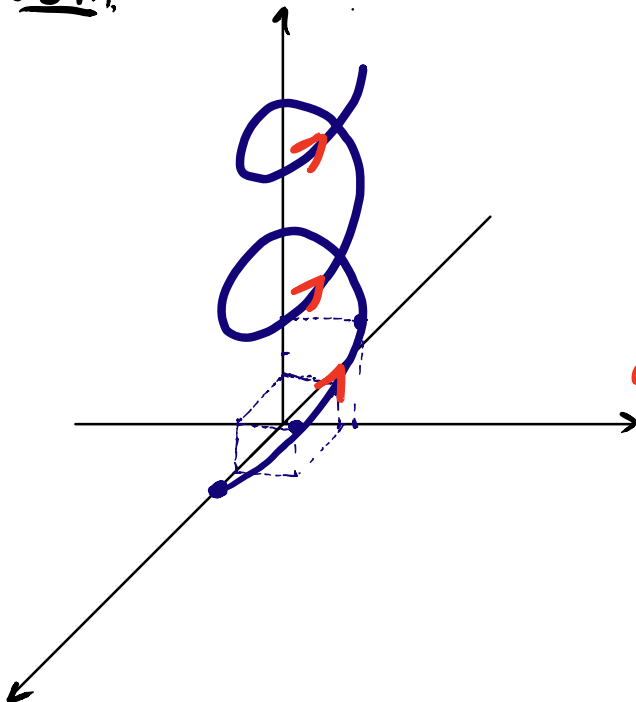
$$z = 1$$

$$t = \frac{\pi}{2}; x = 0, y = 1, z = 1$$

Example: วงกลมในระนาบ xy ที่รัศมี 1 ที่กำลังเคลื่อนที่ขึ้นตาม z

$$x = \cos t, y = \sin t, z = t$$

ตัวอย่าง



$$t = 0; x = 1, y = 0, z = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2}; x = 0, y = 1, z = \frac{\pi}{2}$$

$$t = \frac{\pi}{4}; x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}, z = \frac{\pi}{4}$$

circular helix

"เกลียววงกลม"

3.2 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ (Vector-valued function)

ฟังก์ชัน $f(x) = x \leftarrow \text{real-valued function}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \leftarrow \text{ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์}$

$$f(t) = \underbrace{x(t)}_{} \mathbf{i} + \underbrace{y(t)}_{} \mathbf{j} + \underbrace{z(t)}_{} \mathbf{k}$$

component functions
"ฟังก์ชันส่วนประกอบ"

Example: สมมติฟังก์ชันส่วนประกอบของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$r(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

วิธีทำ: เนื่องจาก $r(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ จะได้
ฟังก์ชันส่วนประกอบ คือ

$$x(t) = t$$

$$y(t) = t^2$$

$$\text{และ: } z(t) = t^3$$

Example: สมมติฟังก์ชันส่วนประกอบของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ D

$$r(t) = (\ln|t-1|)\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$$

ตอบ: ฟังก์ชันส่วนประกอบของ r คือ

$$x(t) = \ln|t-1|$$

$$y(t) = e^t$$

$$z(t) = \sqrt{t}$$

• กำหนดให้ $r(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ตามหา r คือ
เวกเตอร์ที่เป็นไปได้ที่ฟังก์ชัน r มีค่าได้

"ถ้า r สามารถเขียนเป็นผลบวกในสเกลาร์ของ i, j, k ได้
 เราจะได้ $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ ซึ่ง
 ผลบวก (Intersection) ของโดเมนฟังก์ชัน $x(t), y(t)$
 และ $z(t)$

Note! " $\text{Dom}(r) = \text{Dom}(x) \cap \text{Dom}(y) \cap \text{Dom}(z)$ "

Example: สมมติว่าเราต้องการหาโดเมนที่กำหนดให้
 $r(t) = t^2i + t^3j + t^3k$

วิธีทำ: Note! $\text{Dom}(r) = \text{Dom}(x) \cap \text{Dom}(y) \cap \text{Dom}(z)$

พิจารณา $\text{Dom}(x) = \text{Dom}(x=t) = \mathbb{R}$

$\text{Dom}(y) = \mathbb{R}$

$\text{Dom}(z) = \mathbb{R}$

ดังนั้น $\text{Dom}(r) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

□