Example: จงหาโดเมนของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = (\ln|t-1|)\,i + e^{t}\,j + \sqrt{t}\,k$$

วิธีทำ พิจารณา

$$x(t) = \ln|t-1|$$

เนื่องจากฟังก์ชัน $\ln s$ นิยามเมื่อ $s > 0$ ดังนั้น $|t-1| > 0$

$\Rightarrow t-1 > 0$ หรือ $-(t-1) > 0 \Rightarrow t > 1$ หรือ $1 > t \Rightarrow \mathrm{Dom}(x) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$$y(t) = e^{t}$$

$\Rightarrow \mathrm{Dom}(y) = \mathbb{R}$

$$z(t) = \sqrt{t}$$

$\Rightarrow \mathrm{Dom}(z) = [0, +\infty)$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(\mathbf{r}) &= \mathrm{Dom}(x) \cap \mathrm{Dom}(y) \cap \mathrm{Dom}(z) \\ &= \big((-\infty, 1) \cup (1, +\infty)\big) \cap \mathbb{R} \cap [0, +\infty) \\ &= [0, 1) \cup (1, +\infty)\end{aligned}$$ $\square$

② $\mathbf{r}(t) = \cos \pi t\, i - \ln t\, j + \sqrt{t-2}\, k \Rightarrow \mathrm{Dom}(\mathbf{r}) = ?$

วิธีทำ $x(t) = \cos \pi t \Rightarrow \mathrm{Dom}(x) = \mathbb{R}$

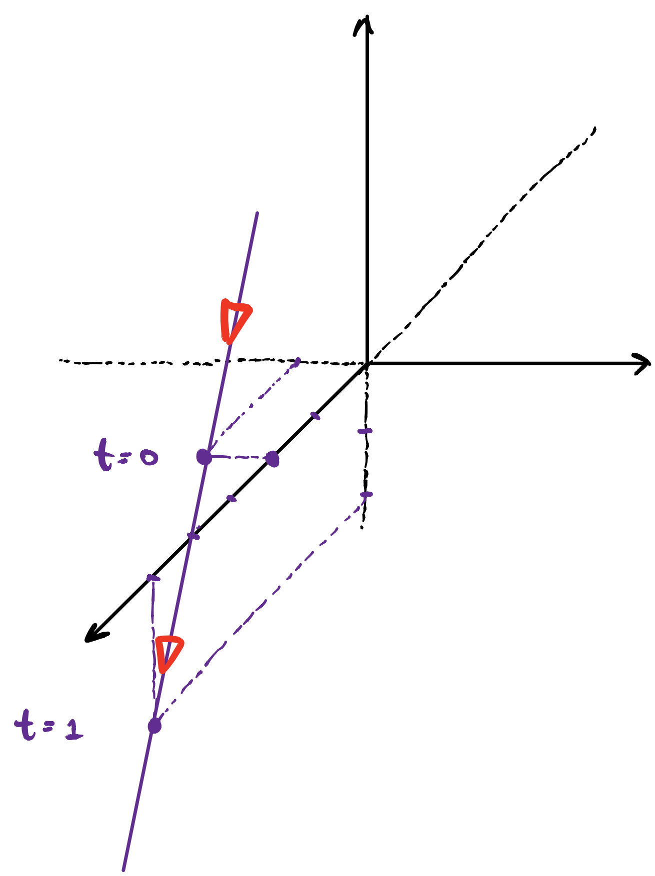
$y(t) = -\ln t \Rightarrow \mathrm{Dom}(y) = (0, +\infty)$

และ $z(t) = \sqrt{t-2} \Rightarrow \mathrm{Dom}(z) = [2, +\infty)$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(\mathbf{r}) &= \mathrm{Dom}(x) \cap \mathrm{Dom}(y) \cap \mathrm{Dom}(z) \\ &= \mathbb{R} \cap (0, +\infty) \cap [2, +\infty) \\ &= [2, +\infty)\end{aligned}$$ $\square$

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน

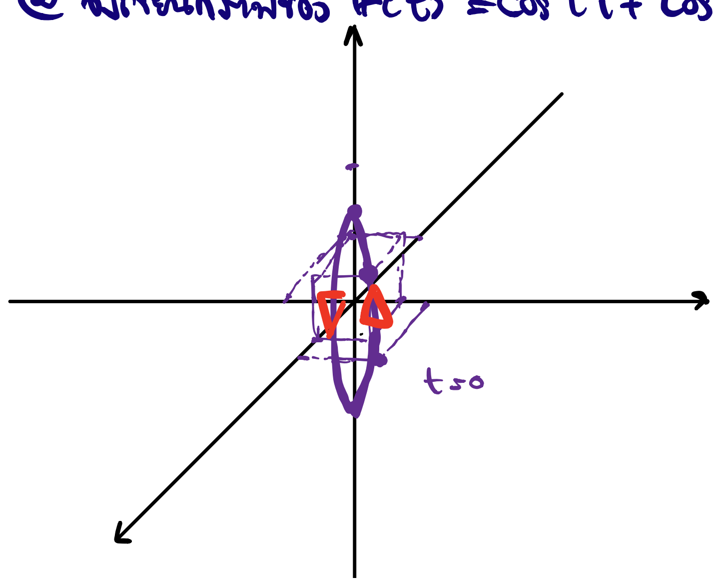
$$\mathbf{r}(t) = (2+3t)\mathbf{i} + (-1+t)\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$$



$t=0;\ (2,-1,0)$

$t=1;\ (5,0,-2)$

② จงเขียนกราฟของ $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\sin t\,\mathbf{k}$



$t=0;$

$(\cos 0, \cos 0, \sqrt{2}\sin 0)$

$=(1,1,0)$

$t=\frac{\pi}{4}$

$\left(\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

$t = \frac{\pi}{2}$

$(\cos^2 \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2}, \sqrt{2}\sin \frac{\pi}{2})$

$= (0, 0, \sqrt{2})$

พีชคณิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

นิยาม: กำหนด $\mathbb{F}, \mathbb{G}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง

$\mathbb{F}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{G}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

จะได้ว่า

1. $(\mathbb{F} \pm \mathbb{G})(t) = \mathbb{F}(t) \pm \mathbb{G}(t)$
2. $(f\mathbb{F})(t) = f(t)\mathbb{F}(t)$
3. $(\mathbb{F} \circ f)(t) = \mathbb{F}(f(t))$
4. $(\mathbb{F} \cdot \mathbb{G})(t) = \mathbb{F}(t) \cdot \mathbb{G}(t)$
5. $(\mathbb{F} \times \mathbb{G})(t) = \mathbb{F}(t) \times \mathbb{G}(t)$

ตัวอย่าง: กำหนดให้ $\mathbb{F}(t) = ti + t^2j + \sqrt{t}k$ และ $\mathbb{G}(t) = (\ln t)i + (1-t^2)j + k$ และ $f(t) = t^2$

จงหา

1. $$\begin{aligned}(\mathbb{F} + \mathbb{G})(t) &= \mathbb{F}(t) + \mathbb{G}(t) \\ &= (ti + t^2j + \sqrt{t}k) + ((\ln t)i + (1-t^2)j + k) \\ &= (t + \ln t)i + (t^2 + 1 - t^2)j + (\sqrt{t} + 1)k \\ &= (t + \ln t)i + j + (\sqrt{t} + 1)k\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}(f\mathbb{F})(t) &= f(t)\mathbb{F}(t) \\ &= (t^2)(ti + t^2j + \sqrt{t}k) \\ &= t^3i + t^4j + t^{5/2}k\end{aligned}$$

③ $(\mathbb{F}\circ f)(t) = \mathbb{F}(f(t))$

$= \mathbb{F}(t^2)$

$= t^2 i + (t^2)^2 j + \sqrt{t^2}\, k$

$= t^2 i + t^4 j + |t| k$

④ $(\mathbb{F}\cdot \mathbb{G})(t) = \mathbb{F}(t)\cdot \mathbb{G}(t)$

$= (t i + t^2 j + \sqrt{t} k)\cdot((\ln t) i + (1-t^2) j + k)$

$= t\ln t + t^2(1-t^2) + \sqrt{t}$

$= t\ln t + t^2 - t^4 + \sqrt{t}$

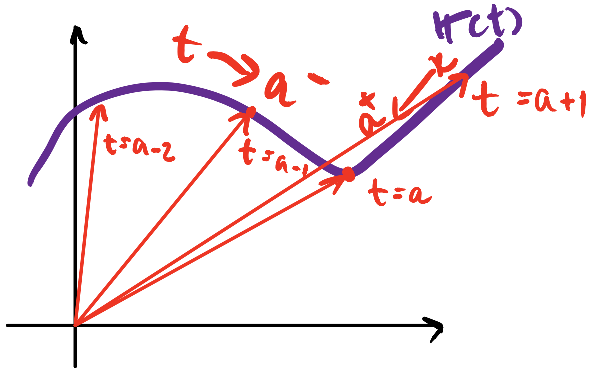
⑤ $(\mathbb{F}\times \mathbb{G})(t) = \mathbb{F}(t)\times \mathbb{G}(t)$

$$= \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ t & t^2 & \sqrt{t} \\ \ln t & (1-t^2) & 1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} i & j \\ t & t^2 \\ \ln t & (1-t^2) \end{array}$$

$= t^2 i + \sqrt{t}\ln t\, j + t(1-t^2) k$

$- t^2 \ln t\, k - \sqrt{t}(1-t^2) i - t j$

3.2 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์



"$\lim\limits_{t\to a} \mathbf{r}(t)$"

นิยาม: ให้ $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่นิยามสำหรับทุก t ที่อยู่ในช่วงที่บรรจุ a [$\mathbf{r}(t)$ อาจจะไม่นิยามที่ $t=a$ ก็ได้]
เราจะเขียนแทนลิมิตของ $\mathbf{r}(t)$ เมื่อ t เข้าสู่ a ด้วย

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L} \text{ if } \lim_{t\to a} \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| = 0$$

ทฤษฎีบท: กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ และ $a \in \mathbb{R}$
ถ้า $\lim\limits_{t\to a} x(t)$, $\lim\limits_{t\to a} y(t)$ และ $\lim\limits_{t\to a} z(t)$ หาค่าได้
แล้ว

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \lim_{t\to a} x(t)\,\mathbf{i} + \lim_{t\to a} y(t)\,\mathbf{j} + \lim_{t\to a} z(t)\,\mathbf{k}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - (2\cos \pi t)\mathbf{k}$
จงหา $\lim\limits_{t\to 0} \mathbf{r}(t)$ (ถ้ามี)

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{t\to 0} x(t) = \lim\limits_{t\to 0} t^2 = 0$

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{t\to 0} e^{t} = e^{0} = 1$$

และ $$\lim_{t\to 0} z(t) = \lim_{t\to 0} (-2\cos \pi t)$$

$$= -2\cos 0 = -2$$

เนื่องจาก $\lim_{t\to 0} x(t) = 0$, $\lim_{t\to 0} y(t) = 1$ และ $\lim_{t\to 2} z(t) = -2$

จึงได้ว่า $$\lim_{t\to 0} r(t) = 0\cdot i + 1\cdot j + (-2)k$$
$$= j - 2k$$

<u>ตัวอย่าง</u> : กำหนดให้ $r(t) = 2\cos t\, i + \dfrac{t}{\sin t} j + \sqrt{t}\, k$ จงหา $\lim_{t\to 0} r(t)$

(ถ้ามี)

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

$$\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{t\to 0} 2\cos t = 2\lim_{t\to 0} \cos t = 2(1) = 2$$

พิจารณา

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = \frac{1}{\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1$$

และ พิจารณา

$$\lim_{t\to 0} z(t) = \lim_{t\to 0} \sqrt{t} = 0$$

ดังนั้น $$\lim_{t\to 0} r(t) = 2i + 1j + 0k = 2i + j$$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.12. ให้ F และ G เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ f และ g เป็นฟังก์ชันค่าจริง และ

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = A, \lim_{t\to t_0} G(t) = B, \lim_{t\to t_0} f(t) = a \text{ และ } \lim_{t\to t_0} g(s) = t_0$$

จะได้ว่า

(1) $\lim_{t\to t_0} (F+G)(t) = A+B$

(2) $\lim_{t\to t_0} (F-G)(t) = A-B$

(3) $\lim_{t\to t_0} (fF)(t) = aA$

(4) $\lim_{t\to t_0} (F\cdot G)(t) = A\cdot B$

(5) $\lim_{t\to t_0} (F\times G)(t) = A\times B$

(6) $\lim_{t\to t_0} (Fog)(s) = A$

Example: กำหนดให้ $\mathbb{F}(t) = \cos \pi t\, i + 2\sin \pi t\, j + 4t^2 k$
และ $\mathbb{G}(t) = t i + t^3 k$

จงหา

① $\lim_{t\to 1} (\mathbb{F}\cdot \mathbb{G})(t)$

วิธีทำ. พิจารณา

$$\lim_{t\to 1} \mathbb{F}(t) = \lim_{t\to 1}(\cos \pi t)\, i + \lim_{t\to 1}(2\sin \pi t)\, j + \lim_{t\to 1} 4t^2\, k$$

$$= -i + (0)j + 4(1)k$$

$$= -i + 4k$$

พิจารณา

$$\lim_{t\to 1} \mathbb{G}(t) = (\lim_{t\to 1} t)\, i + (\lim_{t\to 1} t^3)\, k$$

$$= i + k$$

[illegible]

$$\lim_{t \to 1} (F \cdot G)(t) = \lim_{t \to 1} F(t) \cdot \lim_{t \to 1} G(t)$$

$$= (-i + 4k) \cdot (i + k)$$

$$= (-1)(1) + (4)(1) = -1 + 4 = 3$$

(e) $\lim_{t \to 1} (F \times G)(t)$

$$\lim_{t \to 1} (F \times G)(t) = \left(\lim_{t \to 1} F(t)\right) \times \left(\lim_{t \to 1} G(t)\right)$$

$$= (-i + 4k) \times (i + k)$$

$$= \left| \begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} i & j \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$$= 0 + 4j + 0 - 0 - 0 - (-j)$$

$$= 4j + j = 5j$$

บทนิยาม: กำหนดให้ $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ $a \in \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน $\mathbf{r}(t)$ ต่อเนื่องที่ $t=a$ ถ้า $\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$

ทฤษฎีบท: กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า
$\mathbf{r}(t)$ ต่อเนื่องที่ $t=a$ iff ทุก component functions ($x(t), y(t), z(t)$) ต่อเนื่องที่ $t=a$

ตัวอย่าง จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = 5i - \sqrt{3t+1}\,j + e^{2t}k$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $t=0$ หรือไม่

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชันส่วนประกอบ

$x(t) = 5$, $y(t) = -\sqrt{3t+1}$ และ $z(t) = e^{2t}$

เพื่อ

① $\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{t\to 0} 5 = 5$

และ $x(0) = 5$

$\Rightarrow x$: ต่อเนื่องที่ $t=0$

② $\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{t\to 0} -\sqrt{3t+1} = -\sqrt{1} = -1$

และ $y(0) = -\sqrt{3\cdot 0+1} = -\sqrt{1} = -1$

y : ต่อเนื่องที่ $t=0$

และ $\lim_{t\to 0} z(t) = \lim_{t\to 0} e^{2t} = e^0 = 1$

และ $z(0) = e^{2\cdot 0} = e^0 = 1$

z : ต่อเนื่องที่ $t=0$

เนื่องจาก $x(t), y(t)$ และ $z(t)$ ต่อเนื่องที่ $t=0$
จึงสรุปได้ว่า $r(t)$ ต่อเนื่องที่ $t=0$ #

② จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$r(t) = t^2 i + \frac{1}{t} j + t k$$

ต่อเนื่องที่ $t=0$ หรือไม่ จงอธิบาย

(You try it!)

3.3 อนุพันธ์ (Derivatives)

นิยาม กำหนดให้ $r(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ เราจะนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน r เทียบกับ t ให้เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$r'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{r(t+h)-r(t)}{h} \quad \text{(ถ้ามี)}$$

$$r'(t) = r' = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}[r(t)]$$

ในบางครั้ง จะนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $r(t)$ เทียบกับ t ณ จุด $t=a$ ได้เป็น

$$r'(a) = \lim_{t\to a} \frac{r(t)-r(a)}{t-a} \quad \text{(ถ้ามี)}$$

ทฤษฎีบท: กำหนดให้ $r(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ แล้ว

ถ้า $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$

แล้ว $r'(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$

Example: จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$r(t) = t^2 i + e^t j - (2\cos \pi t)k$$

(You try it!)

ทฤษฎีบท 3.23. กำหนดให้ F, G และ f หาอนุพันธ์ได้ และ g หาอนุพันธ์ได้ที่จุด s และ F หาอนุพันธ์ได้ที่ $g(s)$ จะได้ว่า

(1) $(F+G)'(t) = F'(t) + G'(t)$

(2) $(F-G)'(t) = F'(t) - G'(t)$

(3) $(fF)'(t) = f'(t)F(t) + f(t)F'(t)$

(4) $(F \cdot G)'(t) = F'(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot G'(t)$

(5) $(F \times G)'(t) = F'(t) \times G(t) + F(t) \times G'(t)$

(6) $(Fog)'(s) = F'(g(s))g'(s) = F'(t)g'(s)$