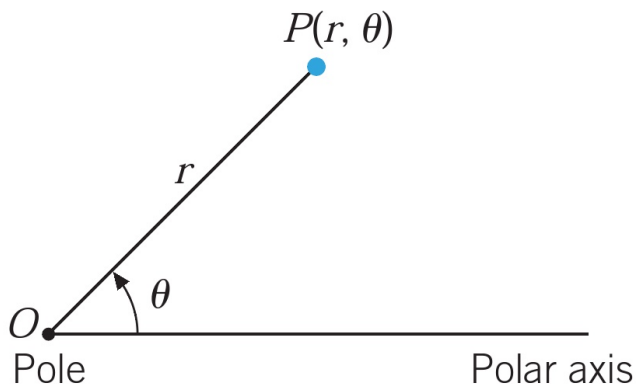


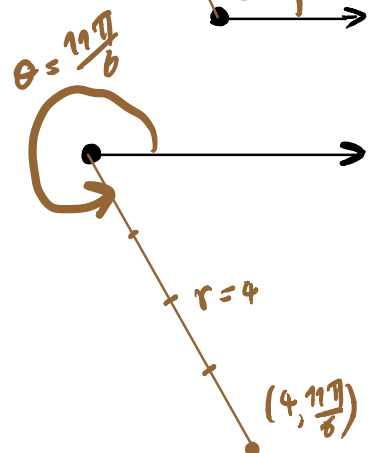
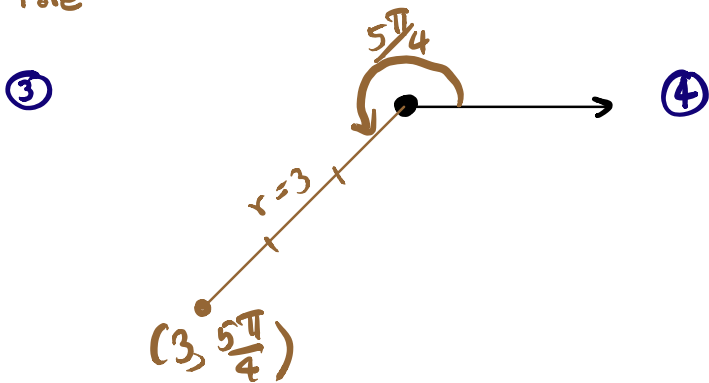
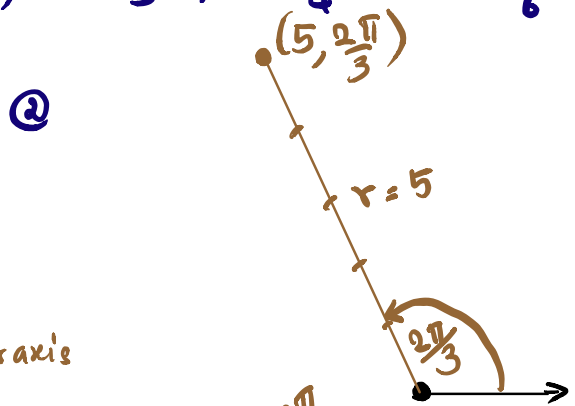
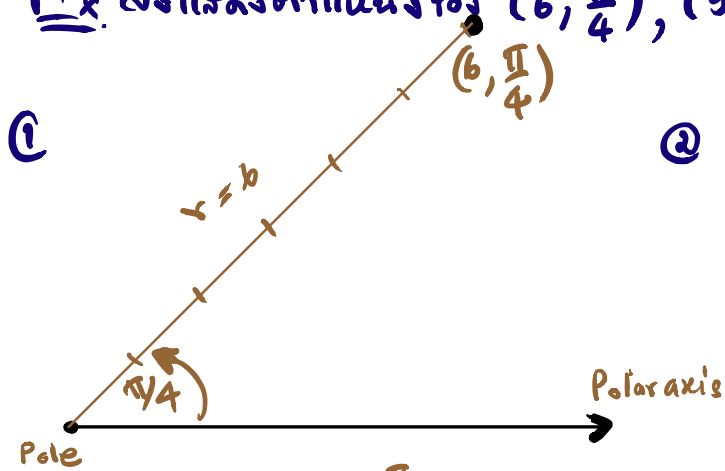
1.5 Coordinate Systems:



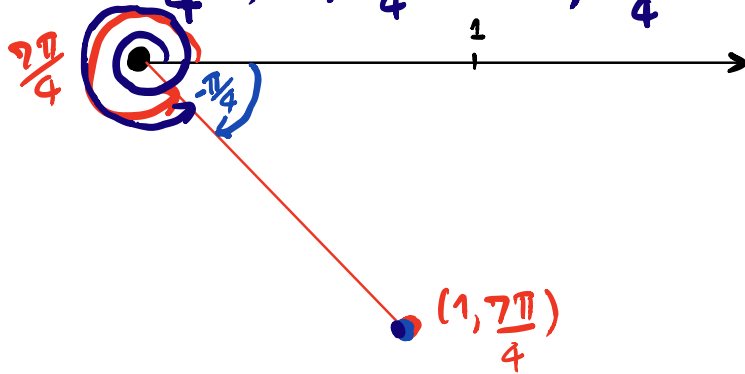
① Polar Coordinate System: ระบบพิกัดเชิงขั้ว



Ex. แสดงพิกัดขั้วของ $(6, \frac{\pi}{4}), (5, \frac{2\pi}{3}), (3, \frac{5\pi}{4})$ และ $(4, \frac{11\pi}{6})$

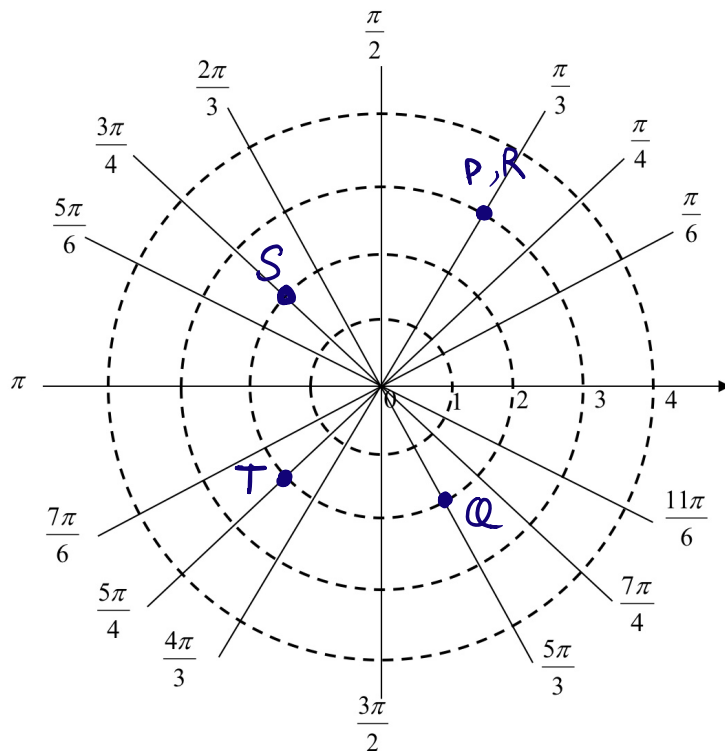


Ex. จงแสดงตำแหน่งของ $(1, \frac{7\pi}{4})$, $(1, -\frac{\pi}{4})$ และ $(1, \frac{15\pi}{4})$ @



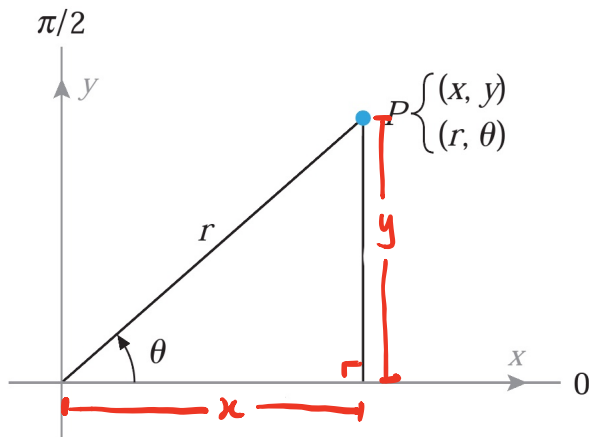
ตัวอย่าง 1.5.1 จงแสดงตำแหน่งของจุด $P(3, \frac{\pi}{3})$, $Q(-2, \frac{2\pi}{3})$, $R(-3, \frac{4\pi}{3})$, $S(2, \frac{3\pi}{4})$ และ $T(-2, \frac{\pi}{4})$

ลงบนระนาบเดียวกัน



• ความสัมพันธ์ของ Rectangular และ Polar

③



Rec. \Rightarrow Polar.

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Polar \Rightarrow Rec.

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

ตัวอย่าง 1.5.2 จงแปลงจุด $(-2, -2)$ ในระบบพิกัดฉากเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วซึ่งมี $-\pi \leq \theta \leq \pi$ และ $r \geq 0$

วิธีทำ. $r^2 = x^2 + y^2 = (-2)^2 + (-2)^2 = 8 \Rightarrow r = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{(-2)}{(-2)} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$$

$(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) \in Q_1$ (ตรงกันข้าม) $\Rightarrow (2\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4})$

* ตัวอย่าง 1.5.3 จงแปลงจุด $(\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2})$ ในระบบพิกัดฉากเป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วซึ่งมี $-\pi \leq \theta \leq \pi$ และ $r \geq 0$

$\in Q_4$ [สังเกตให้ดี!]

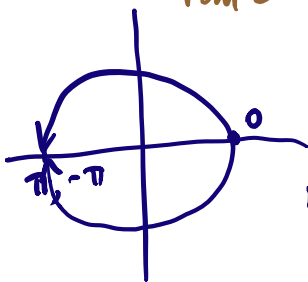
วิธีทำ. $r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r^2 = \frac{25 \times 3}{4} + \frac{25}{4} = 25 \Rightarrow r = 5$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan \theta = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{5\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

มีทั้ง $(\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2})$ และ $(5, -\frac{\pi}{6})$

Q_4 Q_2 Q_4

\times \times



ตัวอย่าง 1.5.4 จงแปลงจุด $(4, \frac{5\pi}{6})$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก

$$r, \theta \Rightarrow (x, y) = ?$$

วิธีทำ

$$x = r \cos \theta = 4 \cos \frac{5\pi}{6} = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$

$$y = r \sin \theta = 4 \sin \frac{5\pi}{6} = 4 \left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

นั่นคือ จุด $(4, \frac{5\pi}{6})$ ในพิกัดเชิงขั้ว คือ $(-2\sqrt{3}, 2)$ ในพิกัดฉาก

ตัวอย่าง 1.5.5 จงแปลงจุด $(6, \frac{2\pi}{3})$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก

วิธีทำ $x = r \cos \theta = 6 \cos \left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6 \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$

และ $y = r \sin \theta = 6 \sin \left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$

นั่นคือ จุด $(6, \frac{2\pi}{3})$ ในพิกัดเชิงขั้ว คือ $(-3, 3\sqrt{3})$ ในระบบพิกัดฉาก

ตัวอย่าง 1.5.6 จงแปลงสมการ $x^2 + y^2 - 3x = 0$ ในระบบพิกัดฉากให้เป็นสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว

(6)

วิธีทำ ข้อ 1 ทน $x = r \cos \theta$ และ $y = r \sin \theta$

ข้อ 2

$$x^2 + y^2 - 3x = 0 \Rightarrow r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - 3r \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow r^2 [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta] - 3r \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 3r \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow r(r - 3 \cos \theta) = 0$$

ถ้า $r = 0$ แล้ว $r = 0$ จะเป็นจุดกำเนิดเท่านั้น เมื่อย่างนี้สมการ $r - 3 \cos \theta = 0$ เป็นสมการเชิงขั้ว

ตัวอย่าง 1.5.6 จงแปลงสมการ $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 4$ ในระบบพิกัดฉากให้เป็นสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว

วิธีทำ $x = r \cos \theta$ และ $y = r \sin \theta$

$$(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 4 \Rightarrow (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) = 4$$

$$\Rightarrow r^4 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 4$$

$$\Rightarrow r^4 \cos 2\theta = 4$$

ตัวอย่าง 1.5.7 จงแปลงสมการ $r = \frac{1}{1 - \cos \theta}$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วเป็นสมการในระบบพิกัดฉาก

6

วิธีทำ ทน $r = \frac{1}{1 - \cos \theta} \Rightarrow r - r \cos \theta = 1$

$$\Rightarrow \pm \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1$$

$$\Rightarrow \pm \sqrt{x^2 + y^2} = x + 1$$

① $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = (x + 1)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow y^2 = 2x + 1$

② $-\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = (-1)(x + 1)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow y^2 = 2x + 1$

ตัวอย่าง 1.5.8 จงแปลงสมการ $r = \frac{1}{\cos \theta + 3 \sin \theta}$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วเป็นสมการในระบบพิกัดฉาก

วิธีทำ $r = \frac{1}{\cos \theta + 3 \sin \theta} \Rightarrow r \cos \theta + 3 r \sin \theta = 1$

$$\Rightarrow x + 3y = 1$$

ตัวอย่าง 1.5.9 จงแปลงสมการ $r(r \cos(2\theta) - \sin \theta) = 1$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วเป็นสมการในระบบพิกัดฉาก

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 1.5



1. จงแสดงตำแหน่งของจุดต่อไปนี้ในระนาบเดียวกัน พร้อมทั้งแปลงจุดเหล่านี้ให้เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก

(a) $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$

(b) $\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$

(c) $\left(1, -\frac{\pi}{3}\right)$

(d) $\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$

(e) $\left(2, \frac{9\pi}{4}\right)$

(f) $\left(-2, -\frac{7\pi}{6}\right)$

(g) $\left(2, \frac{5\pi}{2}\right)$

(h) $\left(-6, \frac{\pi}{4}\right)$

(k) $\left(4, -\frac{11\pi}{6}\right)$

2. กำหนดจุดในระบบพิกัดฉากให้ดังต่อไปนี้ จงหาจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วโดยที่

(2.1) $r > 0$ และ $-\pi < \theta < \pi$

(2.2) $r < 0$ และ $-\pi < \theta < \pi$

(a) $(-1, -1)$

(b) $(\sqrt{3}, -1)$

(c) $(2, 2)$

(d) $(-1, \sqrt{3})$

(e) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

(f) $(-3, \sqrt{3})$

ในข้อ 3-14 จงแปลงสมการในระบบพิกัดฉากที่กำหนดให้ ให้เป็นสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว

3) $x = 4$

4) $y = 6$

5) $x = 3y$

6) $y = x$

7) $x^2 + y^2 = 25$

8) $x^2 - y^2 = 1$

9) $2x - y = 3$

10) $2x + y = 10$

11) $xy = 1$

12) $xy = 9^2$

13) $y = x^2$

14) $y^2 = 6x$

ในข้อ 15-28 จงแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วที่กำหนดให้ ให้เป็นสมการในระบบพิกัดฉาก

15) $r = 3$

16) $r = -3$

17) $\theta = \frac{3\pi}{4}$

18) $\theta = 0$

19) $r = -5 \cos \theta$

20) $r = \sin 2\theta$

21) $r \cos \theta = 8$

22) $r \sin \theta = 3$

23) $r = 1 - \cos 2\theta$

24) $r = 2 + \sin 2\theta$

25) $r = 3 \sec \theta$

26) $r^2 = \cos 2\theta$

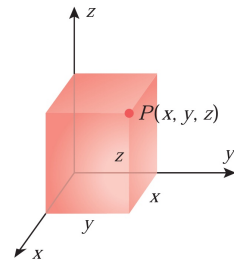
27) $r = \frac{4}{1 - 2 \cos \theta}$

28) $r = \frac{2}{4 \sin + 3 \cos \theta}$

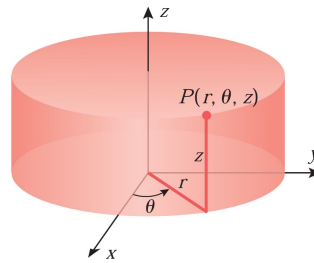
② Cylindrical Coordinate System

ระบบพิกัดทรงกระบอก

8

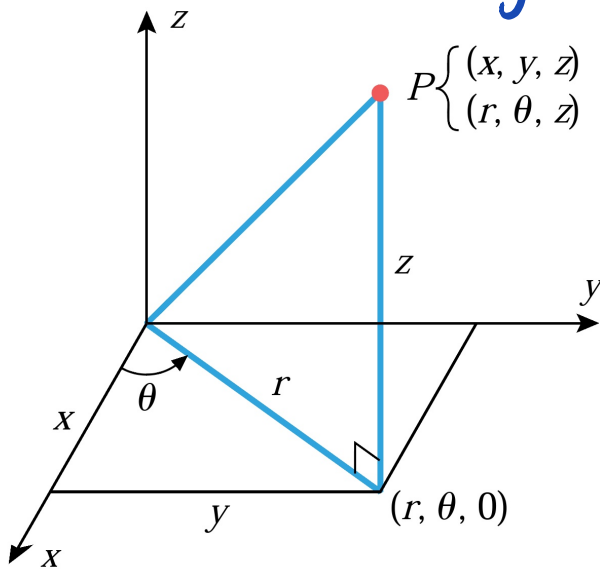


Rectangular coordinates
(x, y, z)



Cylindrical coordinates
(r, theta, z)
(r ≥ 0, 0 ≤ theta < 2π)

• ความสัมพันธ์ระหว่าง Rectangular และ Cylindrical :



$$\text{Rec} \Rightarrow \text{Cyl.}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

$$\text{Cylin.} \Rightarrow \text{Rec.}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

ตัวอย่าง 1.5.11 จงหาพิกัดทรงกระบอกของจุด P_1 และ P_2 ซึ่งมีพิกัดฉากเป็น $(-1, -1, 1)$ และ $(1, 1, -1)$ ตามลำดับ โดยที่ $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$

วิธีทำ
 ① P_1 : ตก $x = -1, y = -1$ and $z = 1$

$(-1, -1, 1)$
 $\sim \sim \sim$
 $x \ y \ z$
 \downarrow
 $(r, \theta, z) = ?$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{(-1)}{(-1)} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$z = z = 1$$

Note! $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1) \in O_1$ ซึ่งตก $(-1, -1, 1) \in O_3$

$(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}, 1) \in O_3$ ←

ดังนั้น จุด $(-1, -1, 1)$ ในพิกัดฉากคือ $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}, 1)$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก.

ตัวอย่าง 1.5.12 จงหาพิกัดฉากของจุด P ซึ่งมีพิกัดทรงกระบอกเป็น $(2, \frac{\pi}{3}, -5)$ $\Rightarrow (x, y, z) = ?$

วิธีทำ,

$$x = r \cos \theta = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$y = r \sin \theta = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = z = -5$$

$$\Rightarrow (1, \sqrt{3}, -5)$$

๒

ตัวอย่าง 1.5.13 จงหาพิกัดฉากของจุด P ซึ่งมีพิกัดทรงกระบอกเป็น $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, -1)$ $\Rightarrow (x, y, z) = ?$ ⁽¹⁰⁾

วิธีทำ. $x = r \cos \theta = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$$y = r \sin \theta = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$z = z = -1$$

$$\Rightarrow (1, 1, -1)$$

□

ตัวอย่าง 1.5.15 จงหาสมการในระบบพิกัดฉากของพื้นผิวที่มีสมการในระบบพิกัดทรงกระบอกเป็น

$$r^2 + z^2 = 4r \cos \theta + 6r \sin \theta + 2z$$

$$(r, \theta, z) \Rightarrow (x, y, z)?$$

Note! $r^2 = x^2 + y^2$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

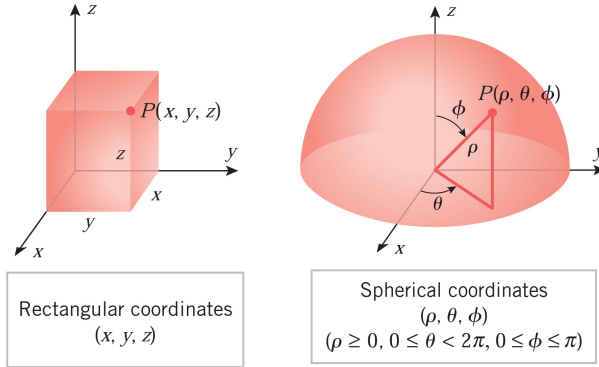
$$z = z$$

ดังนั้น $r^2 + z^2 = 4r \cos \theta + 6r \sin \theta + 2z$

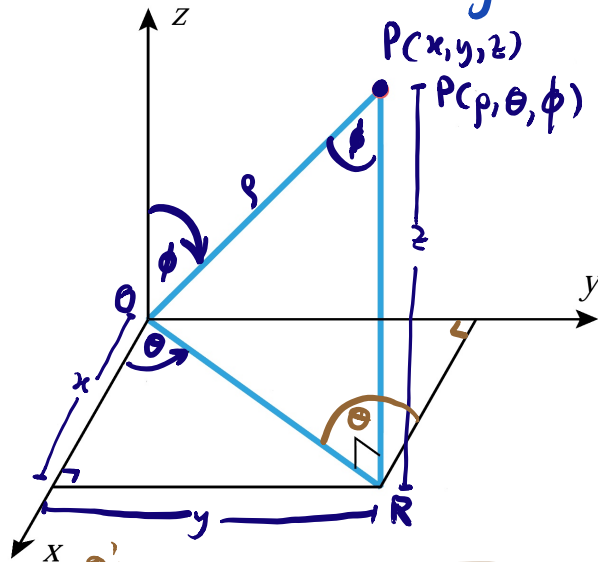
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4x + 6y + 2z$$

□

③ Spherical Coordinate System: ระบบพิกัดทรงกลม



• การแปลงพิกัดจาก Rectangular เป็น Spherical:



Rec. \Rightarrow Spher.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\sin \phi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho \sin \phi}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{\rho \sin \phi}$$

ทำไม?!

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{z}{\rho} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ z &= \rho \cos \phi \\ \sin \phi &= \frac{OR}{\rho} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ OR &= \rho \sin \phi \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{OR} = \frac{x}{\rho \sin \phi}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{OR} = \frac{y}{\rho \sin \phi}$$

Spher. \Rightarrow Rec.

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \sin \phi \\ y &= \rho \sin \theta \sin \phi \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned}$$

(ρ, θ, ϕ)

ตัวอย่าง 1.5.20 จงหาพิกัดทรงกลมของจุด P_1 และ P_2 ซึ่งมีพิกัดฉากเป็น $(2, 2, 0)$ และ $(-2, 0, -2)$
ตามลำดับ



CONVERSION FORMULAS FOR COORDINATE SYSTEMS

CONVERSION		FORMULAS	RESTRICTIONS
* Cylindrical to rectangular	$(r, \theta, z) \rightarrow (x, y, z)$	$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$	
Rectangular to cylindrical	$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, z)$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = y/x, \quad z = z$	
Spherical to cylindrical	$(\rho, \theta, \phi) \rightarrow (r, \theta, z)$	$r = \rho \sin \phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho \cos \phi$	$r \geq 0, \rho \geq 0$ $0 \leq \theta < 2\pi$ $0 \leq \phi \leq \pi$
Cylindrical to spherical	$(r, \theta, z) \rightarrow (\rho, \theta, \phi)$	$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta, \quad \tan \phi = r/z$	
* Spherical to rectangular	$(\rho, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$	$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$	
Rectangular to spherical	$(x, y, z) \rightarrow (\rho, \theta, \phi)$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan \theta = y/x, \quad \cos \phi = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	

วิธีหาค่า P_1 :
 $\rho: \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
 $\phi: \cos \phi = \frac{z}{\rho} = \frac{0}{2\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$

$\theta: \cos \theta = \frac{x}{\rho \sin \phi} = \frac{2}{2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

ดังนั้น $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

θ_1
 θ_3

ตัวอย่าง 1.5.21 จงหาพิกัดฉากของจุด P ซึ่งมีพิกัดทรงกลมเป็น $(4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

13

วิธีทำ.

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi$$
$$= 4 \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{6}$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \phi$$
$$= 4 \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} = 4 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}$$

และ $z = \rho \cos \phi = 4 \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2}$

ดังนั้นพิกัดฉากคือ $(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ \square

ตัวอย่าง 1.5.22 จงหาพิกัดฉากของจุด P ซึ่งมีพิกัดทรงกลมเป็น $(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi)$

วิธีทำ.

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi$$
$$= 2\sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4} \sin \pi$$
$$= 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (0) = 0$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \phi$$
$$= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (0) = 0$$

$$z = \rho \cos \phi$$
$$= 2\sqrt{2} \cos \pi = 2\sqrt{2} (-1) = -2\sqrt{2}$$

ดังนั้นพิกัดฉากคือ $(0, 0, -2\sqrt{2})$ \square

ตัวอย่าง 1.5.23 จงหาสมการในระบบพิกัดฉากของพื้นผิวซึ่งมีสมการในระบบพิกัดทรงกลม ดังนี้

(a) $\rho \cos \phi = 4$

(b) $\rho \sin \phi = 4$

วิธีทำ. (a) เนื่องจาก $z = \rho \cos \phi$ ดังนั้น สมการ
ในระบบพิกัดฉากคือ

$$z = 4$$

(b) เนื่องจาก $\rho \sin \phi = 4$

เมื่อบรรยายออกมาจะได้ $\rho^2 (= x^2 + y^2 + z^2)$ หรือ $z (= \rho \cos \phi)$
จะได้

$$(\rho \sin \phi)^2 = 4^2 \Rightarrow \rho^2 \sin^2 \phi = 16$$

$$\Rightarrow \rho^2 (1 - \cos^2 \phi) = 16$$

$$\Rightarrow \rho^2 - \rho^2 \cos^2 \phi = 16$$

$$\Rightarrow \rho^2 - (\rho \cos \phi)^2 = 16$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - (z)^2 = 16$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 16$$

ดังนั้น สมการในระบบพิกัดฉากคือ

$$x^2 + y^2 = 16$$

(15)



ตัวอย่าง 1.5.24 จงหาสมการในระบบพิกัดทรงกลมของสมการในระบบพิกัดฉาก $x^2 + y^2 = z$

วิธีทำ. Note!

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta \sin \phi \\y &= \rho \sin \theta \sin \phi \\ \text{และ: } z &= \rho \cos \phi\end{aligned}$$

พิสูจน์

$$x^2 + y^2 = z$$

$$\Rightarrow (\rho \cos \theta \sin \phi)^2 + (\rho \sin \theta \sin \phi)^2 = \rho \cos \phi$$

$$\Rightarrow \rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi = \rho \cos \phi$$

[เพื่อหาก ลมทหรนี้ ในฟอว่า เสีอ $\rho = 0$ อยู่เลิก]

$$\Rightarrow \rho \sin^2 \phi (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_{=1}) = \cos \phi$$

$$\Rightarrow \rho \sin^2 \phi = \cos \phi$$

