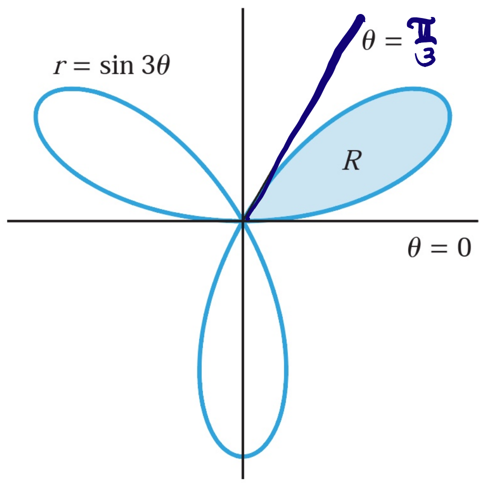
!ทบทวน! ต้องรู้ - ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

▶ Example 3 Use a polar double integral to find the area enclosed by the three-petaled rose $r = \sin 3\theta$.



วิธีทำ $r_1 = 0$ [น้อย]

$r_2 = \sin 3\theta$ [มาก]

$\theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_2 = ?$

$r = 0 \Rightarrow \sin 3\theta = 0$

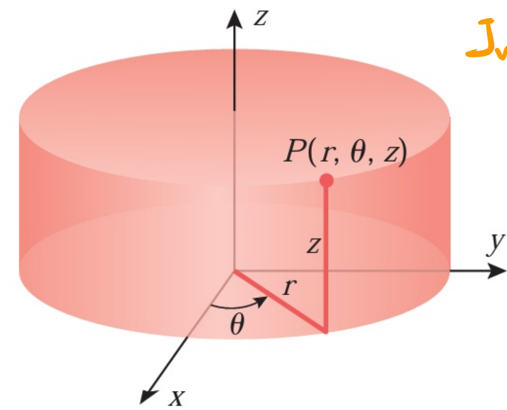
$3\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$

$\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$

$$R = \iint_R 1\,dA = 3\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}} \int_{r=0}^{r=\sin 3\theta} r\,dr\,d\theta$$

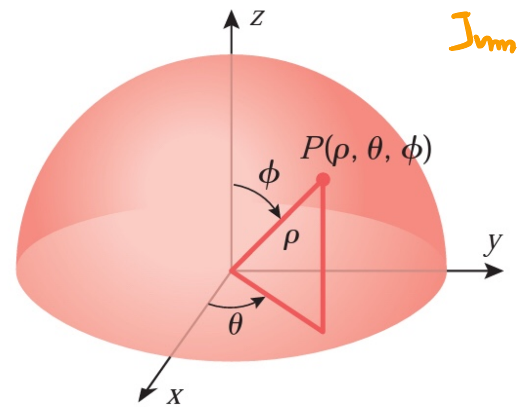
ต้องรู้ - ระบบในพิกัดทรงกระบอกและพิกัดทรงกลม

Jvm!

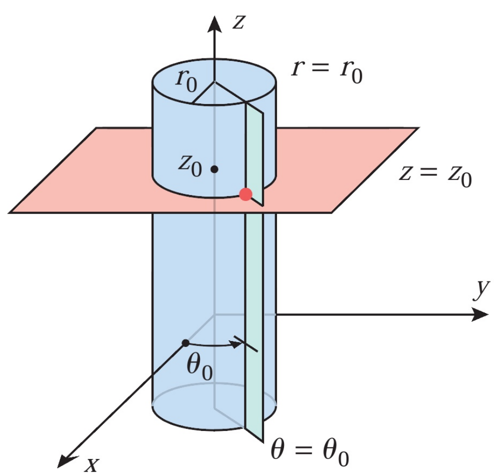


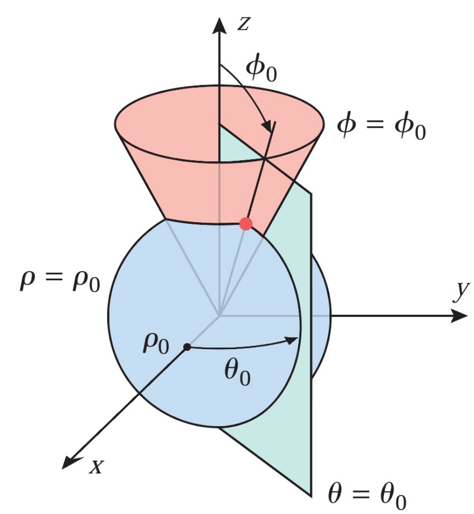
Cylindrical coordinates
(r, θ, z)
$(r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$

Jvm!



Spherical coordinates
(ρ, θ, ϕ)
$(\rho \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi)$





CONVERSION FORMULAS FOR COORDINATE SYSTEMS

CONVERSION		FORMULAS	RESTRICTIONS
* Cylindrical to rectangular	$(r, \theta, z) \to (x, y, z)$	$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$	$r \geq 0,\ \rho \geq 0$ $0 \leq \theta < 2\pi$ $0 \leq \phi \leq \pi$ Jvm!
* Rectangular to cylindrical	$(x, y, z) \to (r, \theta, z)$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = y/x, \quad z = z$	
Spherical to cylindrical	$(\rho, \theta, \phi) \to (r, \theta, z)$	$r = \rho\sin\phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho\cos\phi$	
Cylindrical to spherical	$(r, \theta, z) \to (\rho, \theta, \phi)$	$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta, \quad \tan\phi = r/z$	
* Spherical to rectangular	$(\rho, \theta, \phi) \to (x, y, z)$	$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi$	
* Rectangular to spherical	$(x, y, z) \to (\rho, \theta, \phi)$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan\theta = y/x, \quad \cos\phi = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	

2.7 ปริพันธ์สามชั้นในพิกัดทรงกระบอกและพิกัดทรงกลม

(Triple Integrals in Cylindrical and Spherical Coordinates)

ในหัวข้อก่อนได้พบว่าบางครั้งการคำนวณค่าปริพันธ์ในระบบเชิงขั้วทำได้ง่ายกว่าการคำนวณในระบบพิกัดฉาก ทำนองเดียวกัน บางครั้งการคำนวณค่าปริพันธ์ในระบบทรงกระบอกและระบบทรงกลมทำได้ง่ายกว่าการคำนวณในระบบพิกัดฉาก ในหัวข้อนี้จะศึกษาปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดเหล่านี้

<u>ปริพันธ์สามชั้นในระบบทรงกระบอก</u> ในระบบพิกัดฉากปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชันต่อเนื่อง f บนรูปทรง G กำหนดโดย

$$\iiint_G f(x,y,z)dV = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*,y_k^*,z_k^*)\Delta V_k$$

เมื่อ ΔV_k เป็นปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่อยู่ภายใน G และ (x_k^*,y_k^*,z_k^*) เป็นจุดภายในทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้(ดูรูปที่ 17.7.1) ปริพันธ์สามชั้นในพิกัดทรงกระบองและพิกัดทรงกลมจะกำหนดในทำนองเดียวกัน ยกเว้นแต่บริเวณ G ไม่ได้แบ่งเป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก แต่จะแบ่งเป็นบริเวณที่เหมาะสมกับพิกัดเหล่านี้

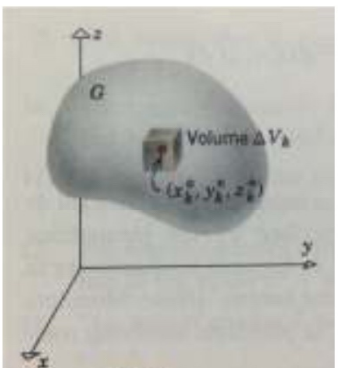


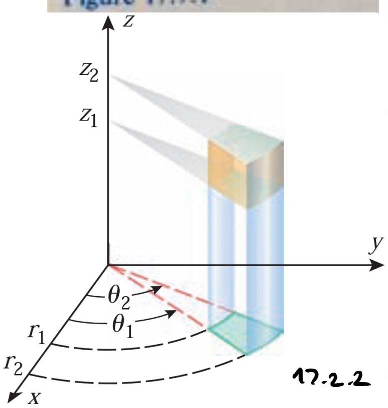
Figure 17.7.1

ในระบบพิกัดทรงกระบอก สมการอย่างง่ายที่สุดจะอยู่ในรูป

$$r = \text{ค่าคงตัว} \qquad \theta = \text{ค่าคงตัว} \qquad z = \text{ค่าคงตัว}$$

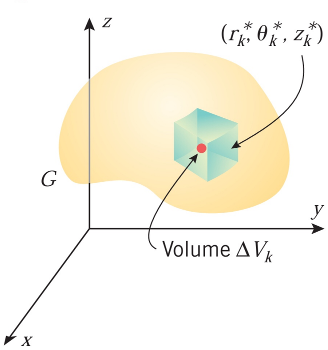
สมการที่หนึ่งจะเป็นทรงกระบอกตั้งฉากจุดศูนย์กลางอยู่ที่แกน z สมการที่สองจะเป็นครึ่งระนาบที่แขวนอยู่กับแกน z สมการที่สามเป็นระนาบในแนวราบ พื้นผิวเหล่านี้จะทำให้เกิดรูปทรงที่เรียกว่า ลิ่มทรงกระบอก (cylindrical wedge) พิจารณาให้ชัดเจน ลิ่มทรงกระบอกเป็นรูปทรงที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิวหกรูปแบบ คือ

ทรงกระบอกสองรูป	$r = r_1,\ r = r_2$	$(r_1 < r_2)$
ครึ่งระนาบสองรูป	$\theta = \theta_1,\ \theta = \theta_2$	$(\theta_1 < \theta_2)$
ระนาบสองระนาบ	$z = z_1,\ z = z_2$	$(z_1 < z_2)$



17.2.2

(ดูรูปที่17.7.2) ขนาด $\theta_2-\theta_1,\ r_2-r_1,\ z_2-z_1$ เรียกว่า มุมศูนย์กลาง หนา สูง ของลิ่ม



การให้ความหมายของปริพันธ์บน G ของฟังก์ชัน $f(r,\theta,z)$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก มีขั้นตอนดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> สร้างเครือข่ายสามมิติที่ประกอบด้วยทรงกระบอกตั้งฉากศูนย์กลางอยู่ที่แกน z ครึ่งระนาบแขวนอยู่กับแกน z ระนาบระดับ บล็อกที่เกิดจากเครือข่ายนี้จะเป็นลิ่มทรงกระบอก ใช้เครือข่ายแบ่งบริเวณ G ออกเป็นบริเวณ

ย่อย และกำจัดบริเวณย่อยที่ไม่เป็นสับเซตของบริเวณ G ออกจากการพิจารณา จะเหลือแต่ลิ่มทรงกระบอกที่อยู่ภายใน G (ดูรูปที่ 17.7.3) แทนปริมาตรของลิ่มทรงกระบอกภายในเหล่านี้ด้วย

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$$

<u>ขั้นที่ 2</u> เลือกจุดใด ๆ ในแต่ละลิ่มทรงกระบอกภายในและแทนด้วย

$$(r_1^*, \theta_1^*, z_1^*), (r_2^*, \theta_2^*, z_2^*), \ldots, (r_n^*, \theta_n^*, z_n^*)$$

(ดูรูปที่ 17.7.3)

<u>ขั้นที่ 3</u> จัดรูปแบบผลบวก

$$\sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$

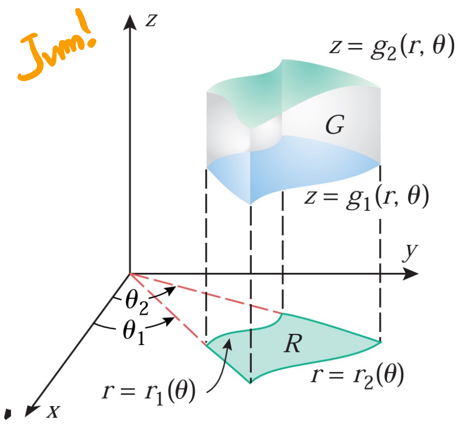
<u>ขั้นที่ 4</u> ทำกระบวนการนี้ซ้ำอีกหลาย ๆ ครั้งเพื่อเพิ่มจำนวนบริเวณย่อยที่ทำให้ สูง หนา และมุมศูนย์กลางของลิ่มทรงกระบอกมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และ n ซึ่งเป็นจำนวนลิ่มมีค่าเข้าใกล้ $+\infty$ กำหนด

$$\iiint_G f(r,\theta,z)dV = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$

ในหัวข้อ 2.5 ได้ให้ความหมายปริพันธ์สามชั้นบนรูปทรงที่ง่ายก่อน และได้กล่าวถึงวิธีการคำนวณค่าปริพันธ์ สำหรับกรณีนี้ก็เช่นเดี่ยวกัน ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยในการคำนวณค่าปริพันธ์โดยการทำซ้ำ

<u>ทฤษฎีบท 2.7.1</u> ให้ G เป็นรูปทรงอย่างง่ายซึ่งสมการพื้นผิวบนคือ $z = g_2(r,\theta)$ และสมการพื้นผิวล่างคือ $z = g_1(r,\theta)$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก ถ้า R เป็นภาพฉายของรูปทรงบนระนาบ xy และถ้า $f(r,\theta,z)$ ต่อเนื่องบน G แล้ว

Jvm!



$$\iiint_G f(r,\theta,z)dV = \iint_R \left[\int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)dz \right] dA$$

โดยที่ปริพันธ์สองชั้นบน R คำนวณในระบบเชิงขั้ว โดยเฉพาะถ้าภาพฉาย R เป็นดังรูปที่ 17.7.4 แล้วปริพันธ์ข้างต้นจะเขียนได้ในรูป

$$\iiint_G f(r,\theta,z)dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z) r dz dr d\theta$$

Jvm!

ในที่นี้จะไม่พิสูจน์ทฤษฎีบท 2.7.1 อย่างเป็นทางการ แต่อย่างไรก็ตามตัวประกอบ r ที่อยู่ในตัวถูกหาค่าปริพันธ์สามารถอธิบายได้โดยกลับไปดูนิยาม

$$\iiint_G f(r,\theta,z)dV = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$

ในสูตรนี้ปริมาตร ΔV_k ของลิ่มทรงกระบอกสามารถเขียนได้ในรูป

$$\Delta V_k = \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง}$$

ถ้าแทน หนา มุมศูนย์กลาง และสูงของลิ่มนี้ด้วย $\Delta r_k, \Delta\theta_k$ และ Δz_k และถ้าเลือกจุดใด ๆ $(r_k^*, \theta_k^*, z_k^*)$ อยู่เหนือศูนย์กลางของฐาน(ดูรูปที่ 17.7.5)แล้ว จากที่พิจารณามาแล้วในหัวข้อ 4.3 เกี่ยวกับปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้วแล้วว่าพื้นที่ฐานคือ $r_k^*\Delta r_k\Delta\theta_k$ ดังนั้นจะได้ว่า

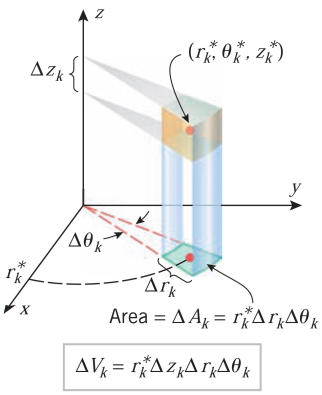


Figure 17.7.5

$$\Delta V_k = r_k^*\Delta r_k\Delta\theta_k\Delta z_k$$

แทนค่า ΔV_k ด้วย $r_k^*\Delta r_k\Delta\theta_k\Delta z_k$ จะได้

$$\iiint_G f(r,\theta,z)\,dV = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(r_k^*,\theta_k^*,z_k^*)r_k^*\Delta r_k\Delta\theta_k\Delta z_k$$

ซึ่งเป็นการอธิบายรูปแบบของตัวถูกหาค่าปริพันธ์ของสูตรในทฤษฎีบท

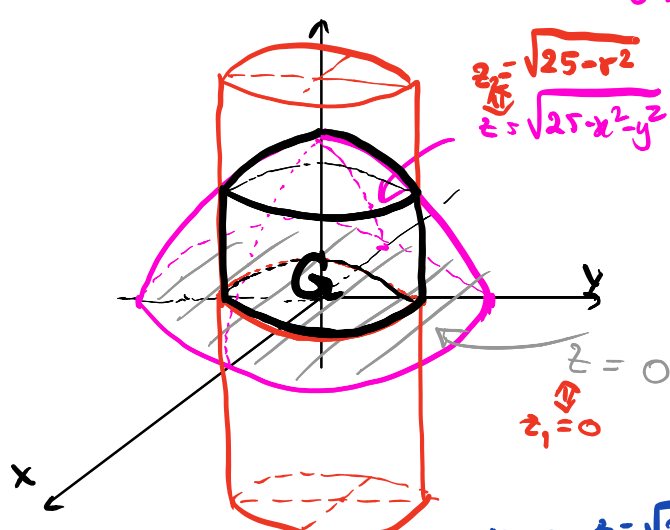
สำหรับการนำสูตรไปใช้นั้น ดีที่สุดจะเริ่มด้วยการสวาดภาพของรูปทรง G ในสามมิติก่อน แล้วจะหาขอบเขตของการหาค่าปริพันธ์ได้ ดังนี้

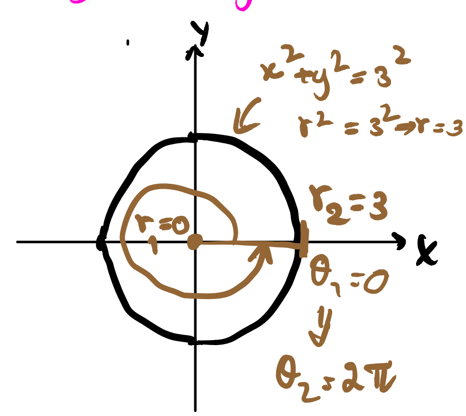
<u>ขั้นที่ 1</u> จากพื้นผิวบน $z = g_2(r,\theta)$ และพื้นผิวล่าง $z = g_1(r,\theta)$ ของรูปทรง จะได้ว่าฟังก์ชัน $g_1(r,\theta)$ และ $g_2(r,\theta)$ จะเป็นขอบเขตของ z ในการหาค่าปริพันธ์ (ถ้าพื้นผิวบนและพื้นผิวล่าง กำหนดในระบบพิกัดฉากต้องแปลงเป็นระบบพิกัดทรงกระบอกก่อน)

<u>ขั้นที่ 2</u> วาดภาพของภาพฉาย R ของรูปทรงในระนาบ xy จากภาพวาดจะหาขอบเขตในการหาค่าปริพันธ์ของ r และ θ ได้เช่นเดียวกับปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

<u>ตัวอย่าง 2.7.1</u> จงใช้ปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอกหาปริมาตร~~และเซนทรอยด์~~ของรูปทรง G ที่มีขอบเขตบนเป็นครึ่งทรงกลม $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ มีขอบเขตล่างเป็นระนาบ xy และมีขอบเขตด้านข้างด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 9$

$0 = \sqrt{25-x^2-y^2} \Rightarrow x^2+y^2=5^2$





$$V = \iiint_G 1\,dV = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=3}\int_{z=0}^{z=\sqrt{25-r^2}} 1\cdot r\,dz\,dr\,d\theta$$

โดยทั่วไป ปริพันธ์สามชั้นจะหาค่าได้ยากในระบบพิกัดฉาก แต่จะหาได้ง่ายเมื่อตัวถูกหาค่าปริพันธ์และขอบเขตการปริพันธ์อยู่ในรูประบบพิกัดทรงกระบอก โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อตัวถูกหาค่าปริพันธ์หรือขอบเขตการหาปริพันธ์อยู่ในรูป

$$x^2 + y^2 \text{ หรือ } \sqrt{x^2 + y^2}$$

เนื่องจากทำให้ง่ายเมื่ออยู่ในรูป

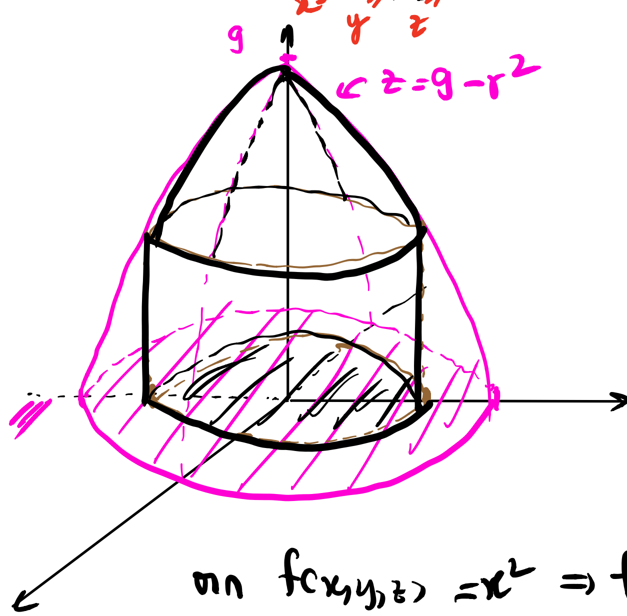
$$r^2 \text{ และ } r$$

ในระบบพิกัดทรงกระบอก $\displaystyle\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \iiint_{\substack{\text{appropriate}\\ \text{limits}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta$

ตัวอย่าง 2.7.2 จงใช้ปริพันธ์สามชั้นหาค่า

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{9-x^2-y^2} x^2\, dzdydx$$

x y z



ขอบเขต

$z = 9 - x^2 - y^2$

$z = 0;\ 9 = x^2 + y^2$

$x = 0, y = 0;\ z = 9$

$y = \sqrt{4 - x^2}$

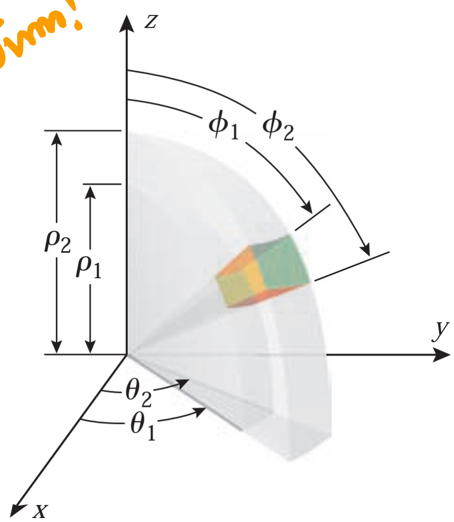
$y^2 = 4 - x^2$

$x^2 + y^2 = 4 = 2^2$

จาก $f(x,y,z) = x^2 \Rightarrow f(r,\theta,z) = r^2\cos^2\theta$

$$\iiint_G x^2\, dzdydx = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=2}\int_{z=0}^{z=9-r^2} r^2\cos^2\theta \cdot r\, dz\, dr\, d\theta$$

Jum!



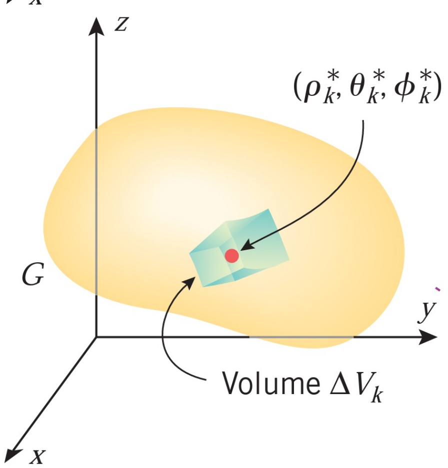
ในระบบพิกัดทรงกลม สมการอย่างง่ายที่สุดจะอยู่ในรูป

$\rho =$ ค่าคงตัว $\quad \theta =$ ค่าคงตัว $\quad \phi =$ ค่าคงตัว

สมการที่หนึ่งจะเป็นทรงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด สมการที่สองจะเป็นครึ่งระนาบที่แขวนอยู่กับแกน z สมการที่สามเป็นกรวยเชิงวงกลมและแกนสมมาตรไปตามแกน z ลิ่มทรงกลม (spherical wedge) หมายถึงรูปทรงที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิวหกรูปแบบ คือ

ทรงกลมสองรูป	$\upsilon = \rho_1,\ \rho = \rho_2$	$(\rho_1 < \rho_2)$
ครึ่งระนาบสองรูป	$\theta = \theta_1,\ \theta = \theta_2$	$(\theta_1 < \theta_2)$
ระนาบสองระนาบ	$\phi = \phi_1,\ \phi = \phi_2$	$(\phi_1 < \phi_2)$

(ดูรูปที่ 17.7.8) จะกล่าวว่าจำนวน $\rho_2 - \rho_1,\ \theta_2 - \theta_1,\ \phi_2 - \phi_1$ ว่าขนาดของลิ่มทรงกลม



ถ้า G เป็นรูปทรงในสามมิติแล้ว ปริพันธ์สามชั้นบน G ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง $f(\rho,\theta,\phi)$ ในระบบพิกัดทรงกลม จะมีความหมายคล้ายกับปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอก ยกเว้นรูปทรง G มีผลแบ่งกั้นเป็นลิ่มทรงกลมโดยเครือข่ายในสามมิติเป็นทรงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ครึ่งระนาบแขวนอยู่กับแกน z กรวยเชิงวงกลมตั้งฉากมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดและเส้นสมมาตรไปตามแกน z (ดูรูปที่ 17.7.9)

กำหนดสมการของปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกลมเป็น

$$\iiint_G f(\rho,\theta,\phi)\,dV = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\rho_k^*,\theta_k^*,\phi_k^*)\Delta V_k$$

โดยที่ ΔV_k คือปริมาตรของลิ่มทรงกลมที่ k ที่อยู่ภายใน G, $(\rho_k^*,\theta_k^*,\phi_k^*)$ เป็นจุดใด ๆ ในลิ่มทรงกลมนี้ และ n เพิ่มขึ้นในลักษณะที่ทำให้ขนาดของแต่ละลิ่มทรงกลมที่อยู่ภายใน G เข้าใกล้ศูนย์

สามารถแสดงได้ว่า

$$\Delta V_k = \rho_k^{*2}\sin\theta_k^*\Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$$

โดยที่ $\Delta\rho$, $\Delta\theta$ และ $\Delta\phi$ เป็นขนาดของลิ่ม แทนค่า ΔV_k จะได้

$$\iiint_G f(\rho,\theta,\phi)\,dV = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\rho_k^*,\theta_k^*,\phi_k^*)\rho_k^{*2}\sin\theta_k^*\Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$$

ซึ่งเป็นแนวทางในการกำหนดสูตรในการคำนวณค่าปริพันธ์สามชั้นในพิกัดทรงกลมโดยการหาปริพันธ์ซ้อน

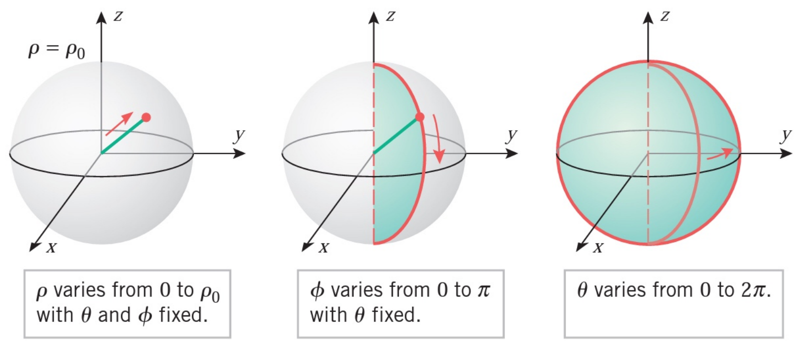
$$\iiint_G f(\rho,\theta,\phi)\,dV = \iiint_{\substack{\text{appropriate}\\ \text{limits}}} f(\rho,\theta,\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Jum!

ข้อสังเกต ตัวประกอบพิเศษ $\rho^2 \sin\phi$ ที่ปรากฏในตัวถูกหาค่าปริพันธ์ของการหาปริพันธ์ซ้อน จะมีที่มาทำนองเดียวกับตัวประกอบพิเศษ r ที่ปรากฏในตัวถูกหาค่าปริพันธ์ในระบบพิกัดทรงกระบอก

ในที่นี้จะเว้นการพิจารณาหาขอบเขตการหาค่าปริพันธ์ แต่จะยกตัวอย่างซึ่งเป็นการอธิบายถึงการหาขอบเขตการหาค่าปริพันธ์และในตัวอย่างพิจารณาอันดับการหาค่าปริพันธ์แบบเดียวกัน คือ เริ่มด้วยหาเทียบกับ ρ ต่อด้วย ϕ และ θ

สมมุติว่าต้องการหาค่าปริพันธ์ของ $f(\rho,\theta,\phi)$ บนรูปทรงทรงกลม G ล้อมรอบด้วยทรงกลม $\rho = \rho_0$ แนวคิดพื้นฐานในการหาขอบเขตในการหาค่าปริพันธ์ คือ ให้ทุกจุดในรูปทรงถูกนับในกระบวนการหาค่าปริพันธ์ ดังรูปที่ 17.7.10 จะแสดงแบบหนึ่งในการหาขอบเขต

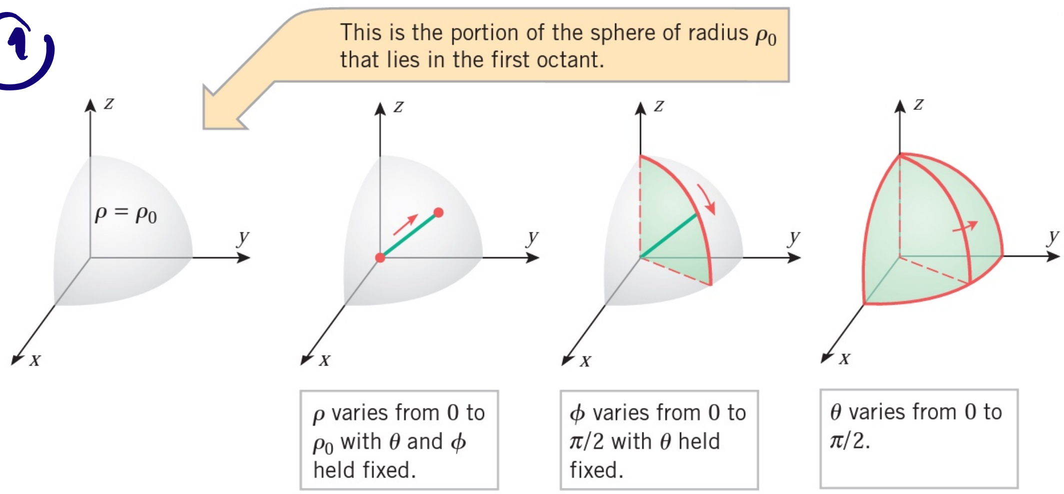


ให้ θ และ ϕ คงที่สำหรับการหาค่าปริพันธ์ครั้งที่ 1 ให้ ρ เปลี่ยนแปลงจาก 0 ไปยัง ρ_0 ซึ่งจะคลอบคลุมเส้นรัศมีจากจุดกำเนิดไปถึงพื้นผิวของทรงกลม ต่อไปให้ θ คงที่และให้ ϕ เปลี่ยนแปลงจาก 0 ถึง π ซึ่งเส้นรัศมีจะกวาดไปเป็นรูปพัด สุดท้ายให้ θ เปลี่ยนแปลงจาก 0 ไปถึง 2π ซึ่งจะทำให้พัดหมุนไปครบรอบ ดังนั้นจะกวาดไปเป็นบริเวณทั้งหมดของทรงกลม นั่นคือปริพันธ์สามชั้นของ $f(\rho,\theta,\phi)$ บนรูปทรงทรงกลม G สามารถเขียนแสดงการคำนวณดังนี้

$$\iiint_G f(\rho,\theta,\phi)\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\rho_0} f(\rho,\theta,\phi)\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

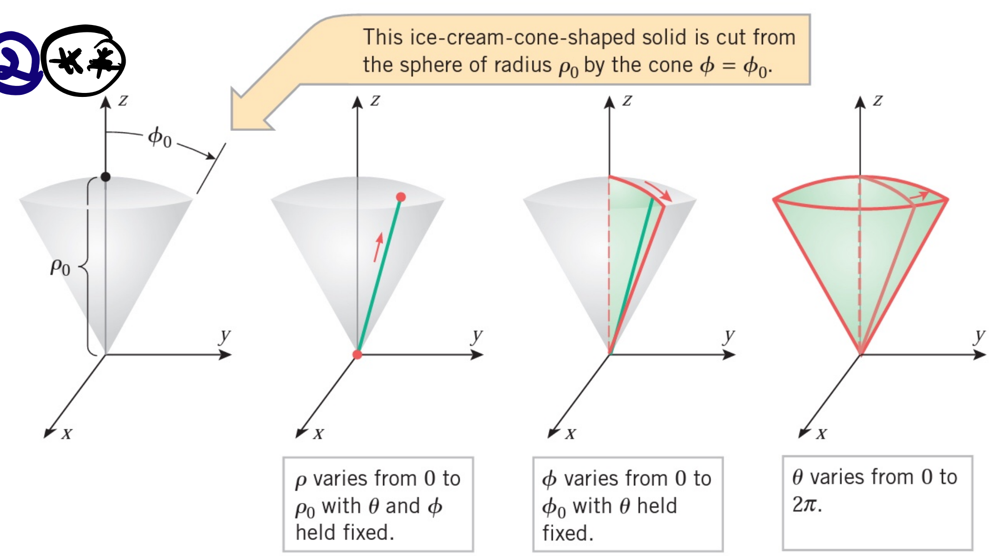
พิกัดของเขตการหา ปริพันธ์เพิ่มเติม

1



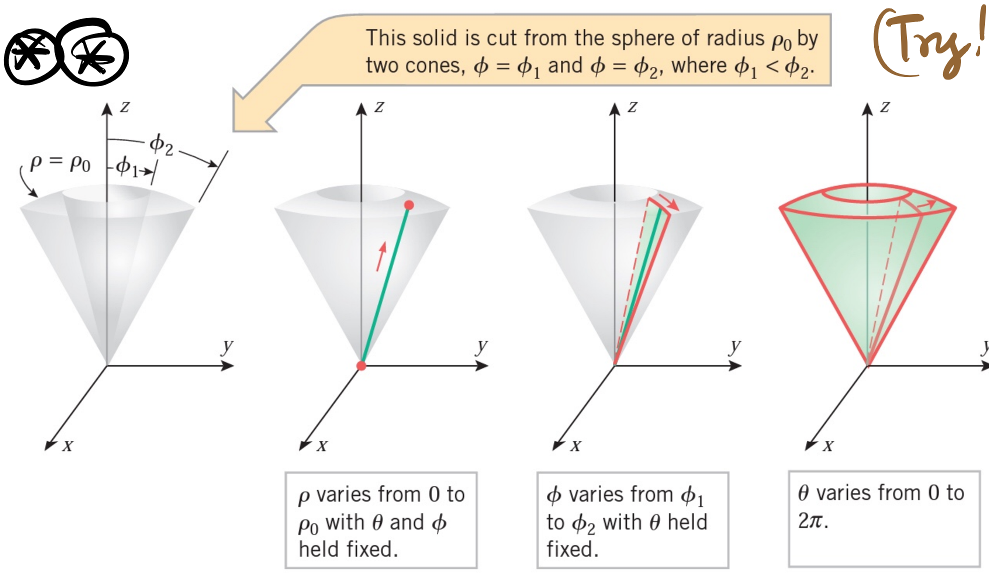
$$\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^{\rho=\rho_0} f(\rho,\theta,\phi)\,\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

2 **

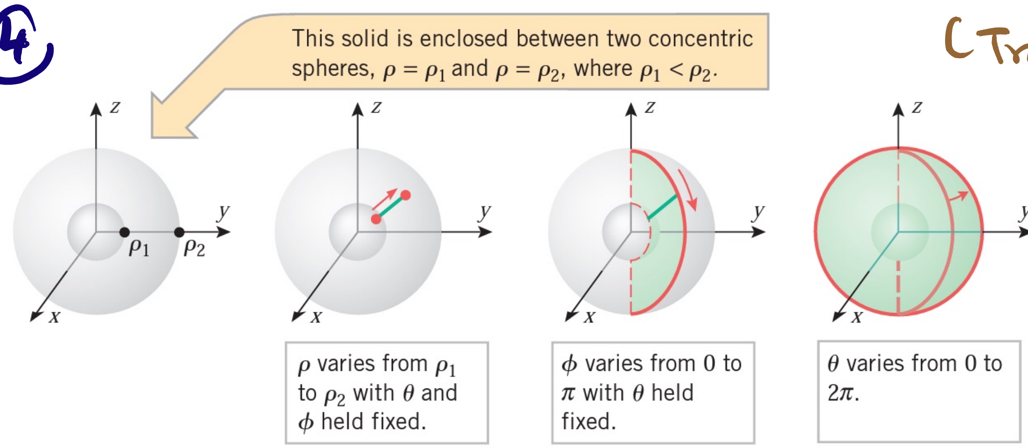


$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=\phi_0} \int_{\rho=0}^{\rho=\rho_0} f(\rho,\theta,\phi)\,\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

3 (Try!)

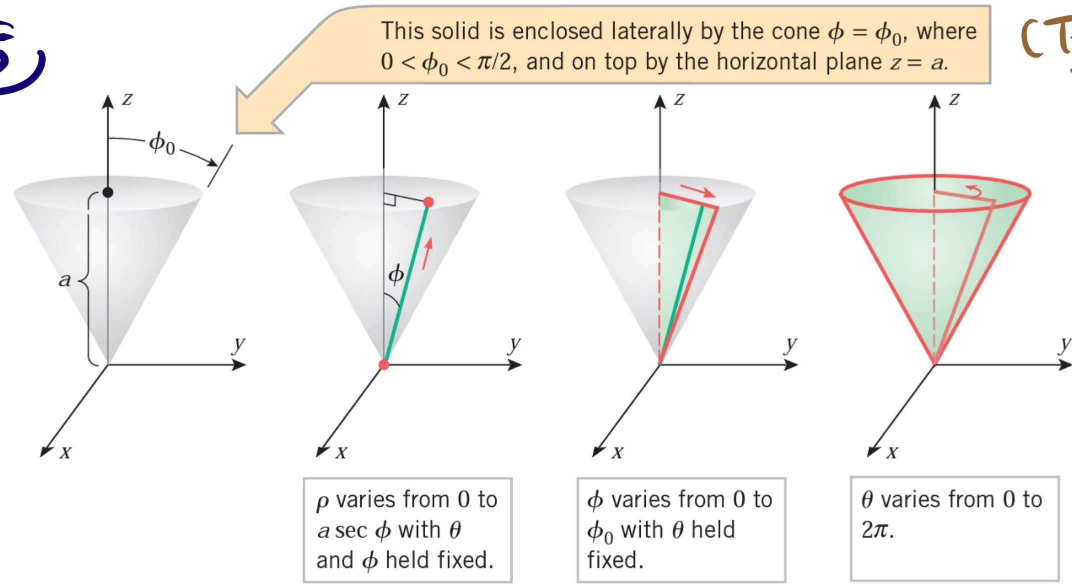

This solid is cut from the sphere of radius ρ_0 by two cones, $\phi = \phi_1$ and $\phi = \phi_2$, where $\phi_1 < \phi_2$.
$\rho = \rho_0$
ϕ_1
ϕ_2
z
y
x
ρ varies from 0 to ρ_0 with θ and ϕ held fixed.
ϕ varies from ϕ_1 to ϕ_2 with θ held fixed.
θ varies from 0 to 2π.

4 (Try!)


This solid is enclosed between two concentric spheres, $\rho = \rho_1$ and $\rho = \rho_2$, where $\rho_1 < \rho_2$.
ρ_1
ρ_2
z
y
x
ρ varies from ρ_1 to ρ_2 with θ and ϕ held fixed.
ϕ varies from 0 to π with θ held fixed.
θ varies from 0 to 2π.

5

(Try!)



This solid is enclosed laterally by the cone $\phi = \phi_0$, where $0 < \phi_0 < \pi/2$, and on top by the horizontal plane $z = a$.
z
y
x
ϕ_0
a
ϕ
ρ varies from 0 to $a \sec \phi$ with θ and ϕ held fixed.
ϕ varies from 0 to ϕ_0 with θ held fixed.
θ varies from 0 to 2π.

ตัวอย่าง 2.7.3 จงใช้ระบบพิกัดทรงกลมหาปริมาตร~~และเซนทรอยด์~~ของรูปทรง G ซึ่งขอบบนคือทรงกลม $x^2+y^2+z^2=16$ และขอบล่างคือกรวย $z=\sqrt{x^2+y^2}$

You Try It!

ตัวอย่าง 2.7.4 จงใช้ระบบพิกัดทรงกลมหาค่าของ

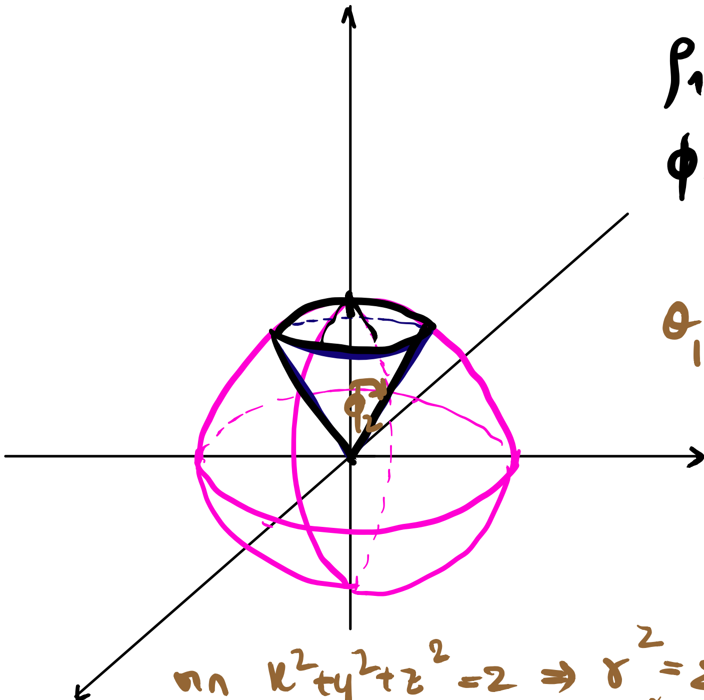
$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$$

You try it!

เปลี่ยน จาก $(x,y,z) \Rightarrow (\rho,\theta,\phi)$

ตัวอย่าง 2.7.7 จงหาปริมาตรที่ล้อมรอบด้วยทรงกลม $x^2+y^2+z^2=2$ และกรวย $x^2+y^2=z^2$

วิธีทำ



$\rho_1=0 \Rightarrow \rho_2=\sqrt{2}$

$\phi_1=0 \Rightarrow \phi_2=?$

$\theta_1=0 \Rightarrow \theta_2=2\pi$

จาก $x^2+y^2+z^2=2 \Rightarrow r^2=2$

จาก $x^2+y^2=z^2 \Rightarrow \cancel{\rho^2}\sin^2\phi\cos^2\theta+\cancel{\rho^2}\sin^2\phi\sin^2\theta=\cancel{\rho^2}\cos^2\phi$

$\Rightarrow \sin^2\phi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\cos^2\phi$

$\Rightarrow \sin^2\phi=\cos^2\phi$

$\Rightarrow \tan^2\phi=1$

$\Rightarrow \tan\phi=1$

$\Rightarrow \phi=\frac{\pi}{4}$

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{4}}\int_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}} 1\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \quad =$$

✔ QUICK CHECK EXERCISES 14.6 (See page 1058 for answers.)

1. (a) The cylindrical wedge $1 \le r \le 3$, $\pi/6 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le z \le 5$ has volume $V =$ ________.
   (b) The spherical wedge $1 \le \rho \le 3$, $\pi/6 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \phi \le \pi/3$ has volume $V =$ ________.

2. Let G be the solid region inside the sphere of radius 2 centered at the origin and above the plane $z = 1$. In each part, supply the missing integrand and limits of integration for the iterated integral in cylindrical coordinates.
   (a) The volume of G is
$$\iiint_G dV = \int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} \underline{\qquad\qquad}\, dz\, dr\, d\theta$$
   (b) $$\iiint_G \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\, dV = \int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} \underline{\qquad\qquad}\, dz\, dr\, d\theta$$

3. Let G be the solid region described in Quick Check Exercise 2. In each part, supply the missing integrand and limits of integration for the iterated integral in spherical coordinates.
   (a) The volume of G is
$$\iiint_G dV = \int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} \underline{\qquad\qquad}\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$
   (b) $$\iiint_G \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\, dV = \int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} \underline{\qquad\qquad}\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

EXERCISE SET 14.6 $\boxed{C}$ CAS

1–4 Evaluate the iterated integral. ■

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} zr\, dz\, dr\, d\theta$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\int_0^{r^2} r\sin\theta\, dz\, dr\, d\theta$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{1} \rho^3\sin\phi\cos\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

4. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sec\phi} \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \quad (a > 0)$

FOCUS ON CONCEPTS

5. Sketch the region G and identify the function f so that
$$\iiint_G f(r,\theta,z)\, dV$$
corresponds to the iterated integral in Exercise 1.

6. Sketch the region G and identify the function f so that
$$\iiint_G f(r,\theta,z)\, dV$$
corresponds to the iterated integral in Exercise 2.

7. Sketch the region G and identify the function f so that
$$\iiint_G f(\rho,\theta,\phi)\, dV$$
corresponds to the iterated integral in Exercise 3.

8. Sketch the region G and identify the function f so that
$$\iiint_G f(\rho,\theta,\phi)\, dV$$
corresponds to the iterated integral in Exercise 4.

9–12 Use cylindrical coordinates to find the volume of the solid. ■

9. The solid enclosed by the paraboloid $z = x^2 + y^2$ and the plane $z = 9$.

10. The solid that is bounded above by the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ and below by the cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

11. The solid that is inside the surface $r^2 + z^2 = 20$ but not above the surface $z = r^2$.

12. The solid enclosed between the cone $z = (hr)/a$ and the plane $z = h$.

13–16 Use spherical coordinates to find the volume of the solid. ■

13. The solid bounded above by the sphere $\rho = 4$ and below by the cone $\phi = \pi/3$.

14. The solid within the cone $\phi = \pi/4$ and between the spheres $\rho = 1$ and $\rho = 2$.

15. The solid enclosed by the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ and the planes $z = 0$ and $z = a$.

16. The solid within the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, outside the cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, and above the xy-plane.

17–20 Use cylindrical or spherical coordinates to evaluate the integral.

✓ **17.** $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{a^2-x^2-y^2} x^2\,dz\,dy\,dx \quad (a > 0)$

✓ **18.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dz\,dy\,dx$

✓ **19.** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dx\,dy$

✓ **20.** $\displaystyle\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dx\,dy$

Try!

21–24 True–False Determine whether the statement is true or false. Explain your answer.

21. A rectangular triple integral can be expressed as an iterated integral in cylindrical coordinates as

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV = \iiint\limits_{\substack{\text{appropriate}\\ \text{limits}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r^2\,dz\,dr\,d\theta$$

22. If $0 \le \rho_1 < \rho_2$, $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le 2\pi$, and $0 \le \phi_1 < \phi_2 \le \pi$, then the volume of the spherical wedge bounded by the spheres $\rho = \rho_1$ and $\rho = \rho_2$, the half-planes $\theta = \theta_1$ and $\theta = \theta_2$, and the cones $\phi = \phi_1$ and $\phi = \phi_2$ is

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

23. Let G be the solid region in 3-space between the spheres of radius 1 and 3 centered at the origin and above the cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$. The volume of G equals

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_1^3 \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

24. If G is the solid in Exercise 23 and $f(x, y, z)$ is continuous on G, then

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV = \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_1^3 F(\rho, \theta, \phi)\rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

where $F(\rho, \theta, \phi) = f(\rho\sin\phi\sin\theta, \rho\sin\phi\cos\theta, \rho\cos\phi)$.

C **25.** (a) Use a CAS to evaluate

$$\int_{-2}^2 \int_1^4 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{r\tan^3\theta}{\sqrt{1+z^2}}\,d\theta\,dr\,dz$$

(b) Find a function $f(x, y, z)$ and sketch a region G in 3-space so that the triple integral in rectangular coordinates

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV$$

matches the iterated integral in cylindrical coordinates given in part (a).

C **26.** Use a CAS to evaluate

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\theta} \rho^{17} \cos\phi \cos^{19}\theta\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

27. Find the volume enclosed by $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ using
(a) cylindrical coordinates
(b) spherical coordinates.

28. Let G be the solid in the first octant bounded by the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ and the coordinate planes. Evaluate

$$\iiint\limits_G xyz\,dV$$

(a) using rectangular coordinates
(b) using cylindrical coordinates
(c) using spherical coordinates.

29. Find the volume of the solid in the first octant bounded by the sphere $\rho = 2$, the coordinate planes, and the cones $\phi = \pi/6$ and $\phi = \pi/3$.

30. In this exercise we will obtain a formula for the volume of the spherical wedge illustrated in Figures 14.6.7 and 14.6.9.

(a) Use a triple integral in cylindrical coordinates to show that the volume of the solid bounded above by a sphere $\rho = \rho_0$, below by a cone $\phi = \phi_0$, and on the sides by $\theta = \theta_1$ and $\theta = \theta_2$ $(\theta_1 < \theta_2)$ is

$$V = \tfrac{1}{3}\rho_0^3(1 - \cos\phi_0)(\theta_2 - \theta_1)$$

[*Hint:* In cylindrical coordinates, the sphere has the equation $r^2 + z^2 = \rho_0^2$ and the cone has the equation $z = r\cot\phi_0$. For simplicity, consider only the case $0 < \phi_0 < \pi/2$.]

(b) Subtract appropriate volumes and use the result in part (a) to deduce that the volume ΔV of the spherical wedge is

$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

(c) Apply the Mean-Value Theorem to the functions $\cos\phi$ and ρ^3 to deduce that the formula in part (b) can be written as

$$\Delta V = \rho^{*2} \sin\phi^*\,\Delta\rho\,\Delta\phi\,\Delta\theta$$

where ρ^* is between ρ_1 and ρ_2, ϕ^* is between ϕ_1 and ϕ_2, and $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

31. Writing Suppose that a triple integral is expressed in cylindrical or spherical coordinates in such a way that the outermost variable of integration is θ and none of the limits of integration involves θ. Discuss what this says about the region of integration for the integral.

Good Luck!

Aj. NN ^_^!!!