2.5 ปริพันธ์สามชั้น

(Triple Integrals)

ในหัวข้อก่อนหน้านี้ได้ให้ความหมายและพิจารณาสมบัติของปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร ในหัวข้อนี้จะให้ความหมายปริพันธ์ของฟังก์ชันสามตัวแปร

<u>นิยามของปริพันธ์สามชั้น</u> ในขณะที่ปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชัน $f(x,y)$ กำหนดบนบริเวณปิด R ในระนาบ xy ปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ จะกำหนดบนรูปทรงปิด G ในสามมิติ เพื่อความแน่นอน G จะไม่ขยายไปไม่สิ้นสุดทิศทางใด จะสมมุติว่าสามารถล้อมรอบ G ให้อยู่ภายในกล่องขนาดใหญ่ที่เหมาะสม โดยที่มีด้านขนานกับระนาบพิกัด(ดูรูปที่ 17.5.1)

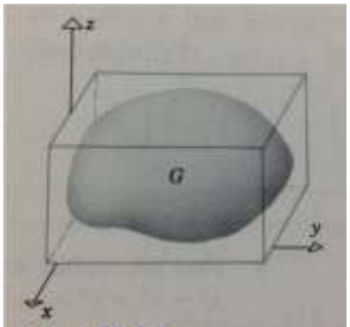
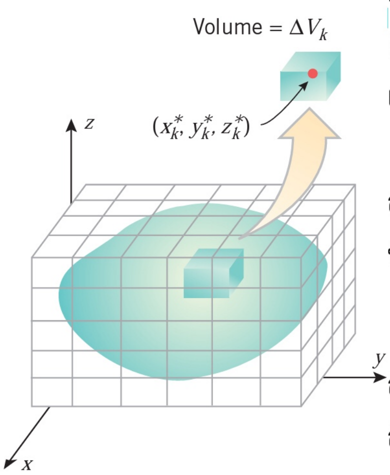


Figure 17.5.1

การให้นิยามของปริพันธ์สามชั้นของ $f(x,y,z)$ บน G อันดับแรก แบ่ง G เป็นกล่องย่อยเล็ก ๆ โดยระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด ไม่พิจารณากล่องย่อยที่บรรจุจุดที่อยู่นอก G และเลือกจุดใด ๆ ในแต่ละกล่องย่อยที่เหลือ ดังแสดงในรูปที่17.5.2 แทนปริมาตรของกล่องย่อยที่ k ด้วย ΔV_k แทนจุดใด ๆ ที่เลือกในกล่องย่อยที่ k ด้วย (x_k^*, y_k^*, z_k^*) ต่อไปเขียนผลคูณ



$$f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$

สำหรับแต่ละกล่องย่อย แล้วหาผลบวกของผลคูณของกล่องย่อยทั้งหมด จะได้ผลบวกรีมันน์

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$

สุดท้าย ทำกระบวนการนี้ซ้ำหลาย ๆ ครั้งและเพิ่มจำนวนกล่องย่อยในลักษณะที่ ความยาว ความกว้าง และความสูงของแต่ละกล่องย่อยมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และ n มีค่าเข้าใกล้ $+\infty$ สิมิต

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$

เรียกว่า ปริพันธ์สามชั้น ของ $f(x,y,z)$ บนบริเวณ G เงื่อนไขที่จะทำให้ปริพันธ์สามชั้นหาค่าได้จะได้ศึกษาในแคลคูลัสขั้นสูง แต่อย่างไรก็ตาม สามารถกล่าวได้ว่าปริพันธ์สามชั้นจะหาได้เสมอ ถ้า f ต่อเนื่องบน G และบริเวณ G ไม่ซับซ้อนจนเกินไป

<u>การหาปริมาตรโดยปริพันธ์สามชั้น</u> ค่าของปริพันธ์สามชั้นจะเป็นจำนวนที่แปรความหมายได้ในทางฟิสิกส์ซึ่งจะพิจารณาในหัวข้อต่อไป ในกรณีพิเศษเมื่อ $f(x,y,z)=1$ ปริพันธ์บน G จะแทนปริมาตรของรูปทรง G นั่นคือ

$$\text{ปริมาตรของ } G = \iiint_G dV$$

ซึ่งได้จากการให้ $f(x,y,z)=1$ จะได้

$$\iiint_G dV = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k$$

ดังที่เสนอในรูป 17.5.2 ผลรวม $\sum \Delta V_k$ จะแทนปริมาตรของกล่องที่บรรจุจุดภายในของรูปทรง G ขณะที่ n เพิ่มขึ้นและขนาดของกล่องย่อยเข้าใกล้ศูนย์ จำนวนกล่องย่อยก็จะเต็มรูปทรง G ดังนั้นผลรวมของปริมาตรจะเป็นปริมาตรของ G นั่นคือ

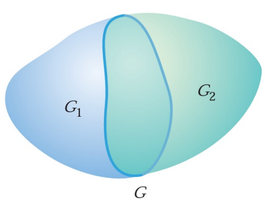
$$\iiint_G dV = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k = \text{ปริมาตรของ } G$$

<u>สมบัติของปริพันธ์สามชั้น</u> ปริพันธ์สามชั้นจะมีสมบัติต่าง ๆ เช่นเดียวกันกับปริพันธ์ชั้นเดียวและสองชั้น คือ

$$\iiint_G cf(x,y,z)dV = c\iiint_G f(x,y,z)dV \quad (c \text{ เป็นค่าคงตัว})$$

$$\iiint_G [f(x,y,z)+g(x,y,z)]dV = \iiint_G f(x,y,z)dV + \iiint_G g(x,y,z)dV$$

$$\iiint_G [f(x,y,z)-g(x,y,z)]dV = \iiint_G f(x,y,z)dV - \iiint_G g(x,y,z)dV$$



G
Figure 17.5.3

ยิ่งกว่านั้น ถ้าบริเวณ G แบ่งออกเป็นสองบริเวณย่อย G_1 และ G_2 (ดังรูปที่ 17.5.3) แล้ว

$$\iiint_G f(x,y,z)dV = \iiint_{G_1} f(x,y,z)dV + \iiint_{G_2} g(x,y,z)dV$$

<u>การหาค่าปริพันธ์สามชั้นบนกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก</u> ปริพันธ์สองชั้นสามารถคำนวณค่าจากการหาค่าปริพันธ์ชั้นเดียวสองครั้ง ปริพันธ์ก็สามารถคำนวณค่าได้จากการหาค่าปริพันธ์ชั้นเดียวสามครั้ง

(Fubini's Theorem)

<u>ทฤษฎีบท 2.5.1</u> ให้ G เป็นกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากกำหนดโดยอสมการ

$$a \le x \le b, \quad c \le y \le d, \quad k \le z \le l$$

ถ้า f ต่อเนื่องบนบริเวณ G แล้ว

$$\iiint_G f(x,y,z)dV = \int_a^b\int_c^d\int_k^l f(x,y,z)dzdydx$$

ยิ่งกว่านั้น การหาปริพันธ์ซ้อนทางด้านขวามือสามารถแทนด้วยการหาปริพันธ์ซ้อนอันใดอันหนึ่งในห้าแบบซึ่งได้จากการสลับอันดับในการหาปริพันธ์

There are two possible orders of integration for the iterated integrals in Theorem 14.1.3:

$$dx\,dy, \quad dy\,dx$$

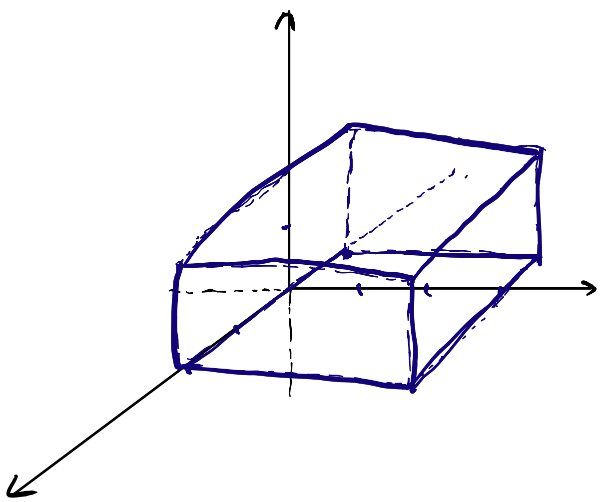
Six orders of integration are possible for the iterated integral in Theorem 14.5.1:

$$dx\,dy\,dz, \quad dy\,dz\,dx, \quad dz\,dx\,dy$$
$$dx\,dz\,dy, \quad dz\,dy\,dx, \quad dy\,dx\,dz$$

ตัวอย่าง 2.5.1 จงหาค่าปริพันธ์สามชั้น

$$\iiint_G 12xy^2z^3\,dV$$

บนกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากกำหนดโดยอสมการ $-1 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 3,\ \ 0 \le z \le 2$



$$\iiint_G 12xy^2z^3\,dv = \int_{z=0}^{z=2}\int_{y=0}^{y=3}\int_{x=-1}^{x=2} 12xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{y=0}^{y=3}\int_{z=0}^{z=2}\int_{x=-1}^{x=2} 12xy^2z^3\,dx\,dz\,dy$$

$$= \int_{z=0}^{z=2}\int_{x=-1}^{x=2}\int_{y=0}^{y=3} 12xy^2z^3\,dy\,dx\,dz$$

$=$

$=$

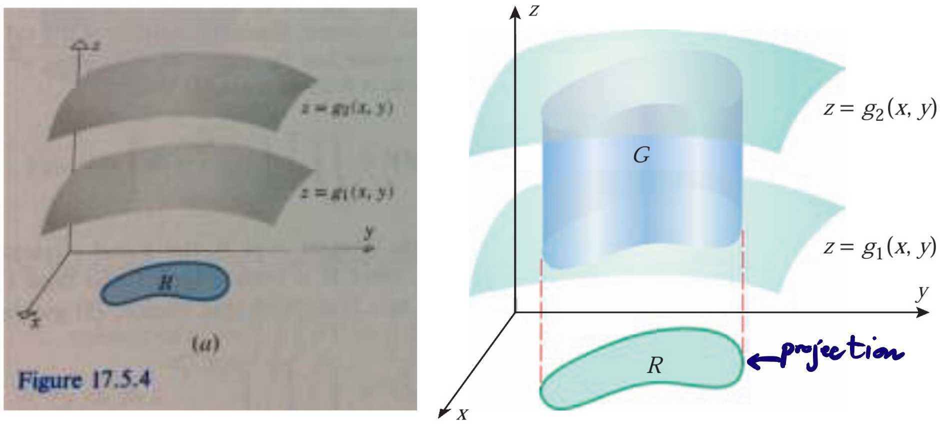
$=$

$= 648$

<u>การหาค่าปริพันธ์สามชั้นบนบริเวณทั่วไป</u> ในการหาค่าปริพันธ์สามชั้นนั้นต้องการหารูปทรงอื่นมากกว่าบนกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก เพื่อความสะดวกจะจำกัดการพิจารณารูปทรงที่สร้างขึ้นดังต่อไปนี้ ให้ R เป็นบริเวณปิดในระนาบ xy และให้ $g_1(x,y)$ และ $g_2(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและสอดคล้องกับ

$$g_1(x,y) \le g_2(x,y)$$

ทุกค่า (x,y) ใน R ในทางเรขาคณิตเงื่อนไขนี้บอกให้ทราบว่าพื้นผิว $z=g_2(x,y)$ ไม่อยู่ใต้พื้นผิว $z=g_1(x,y)$ บนบริเวณ R (ดูรูปที่ 17.5.4a) จะเรียก $z=g_1(x,y)$ ว่าพื้นผิวล่างและเรียก $z=g_2(x,y)$ ว่าพื้นผิวบน ให้ G เป็นรูปทรงที่บรรจุจุดทั้งหมดที่อยู่ข้างบนหรือข้างล่างบริเวณ R อยู่ระหว่างพื้นผิวล่างและพื้นผิวบน(ดูรูปที่17.5.4b) รูปทรง G ที่สร้างในลักษณะนี้เรียกว่า รูปทรงอย่างง่าย และเรียกบริเวณ R ว่า ภาพฉาย ของ G บนระนาบ xy



(a)
Figure 17.5.4

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ จะช่วยให้สามารถหาค่าปริพันธ์สามชั้นบนรูปทรงอย่างง่ายได้

<u>ทฤษฎีบท 2.5.2</u> ให้ G เป็นรูปทรงอย่างง่ายโดยที่พื้นผิวบนคือ $z=g_2(x,y)$ และพื้นผิวล่างคือ $z=g_1(x,y)$ และให้ R เป็นภาพฉายของ G บนระนาบ xy ถ้า $f(x,y,z)$ ต่อเนื่องบน G แล้ว

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$$

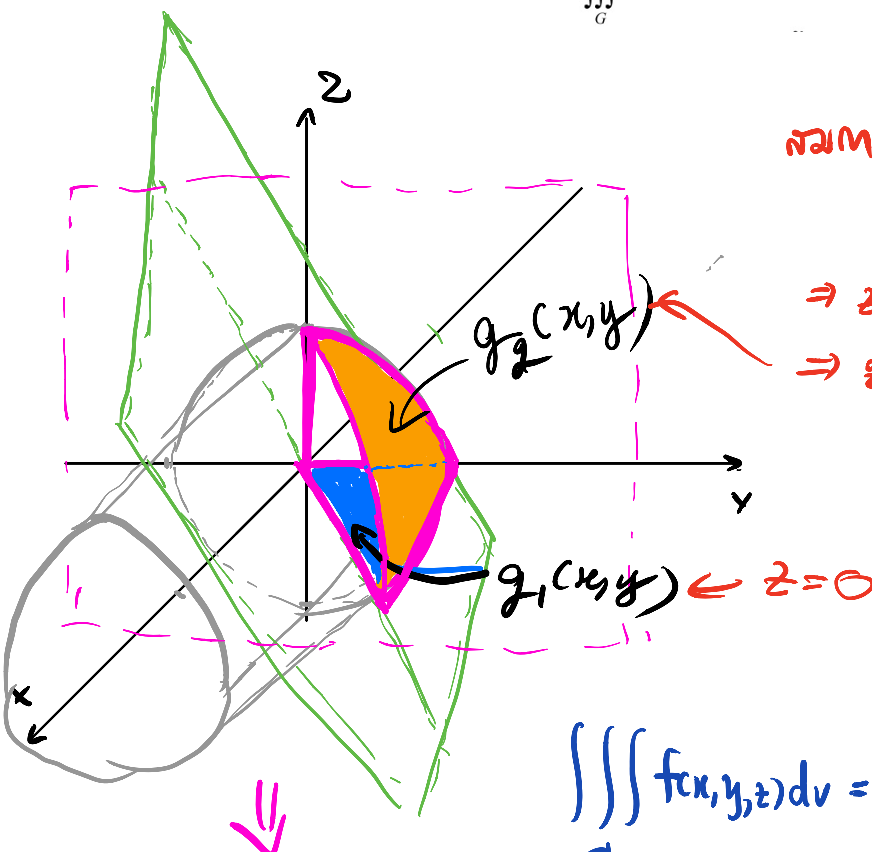
จากสูตรของการหาปริพันธ์สามชั้น อันดับแรกต้องหาปริพันธ์เทียบกับ z จะฟังก์ชันของ x และ y หาปริพันธ์ฟังก์ชันของ x และ y บนบริเวณ R ในการใช้สูตรนี้จะต้องวาดภาพของรูปทรง G ในสามมิติแล้วหาขอบเขตในการหาปริพันธ์ ซึ่งจะทำได้ดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> หาสมการ $z=g_2(x,y)$ ที่เป็นพื้นผิวบนและ $z=g_1(x,y)$ ที่เป็นพื้นผิวล่างของ G ฟังก์ชัน $g_1(x,y)$ และ $g_2(x,y)$ จะทำให้ได้ขอบเขตการหาปริพันธ์สำหรับ z

<u>ขั้นที่ 2</u> วาดภาพของภาพฉาย R ในสองมิติของรูปทรงบนระนาบ xy จากภาพวาดจะได้ขอบเขตการปริพันธ์สองชั้นบน R

ตัวอย่าง 2.5.2 ให้ G เป็นลิ่มในอัฐภาคที่หนึ่งตัดจากรูปทรงกระบอก $y^2+z^2 \le 1$ โดยระนาบ $y=x$ และ $x=0$ จงหาค่า

$$\iiint_G z\,dV$$

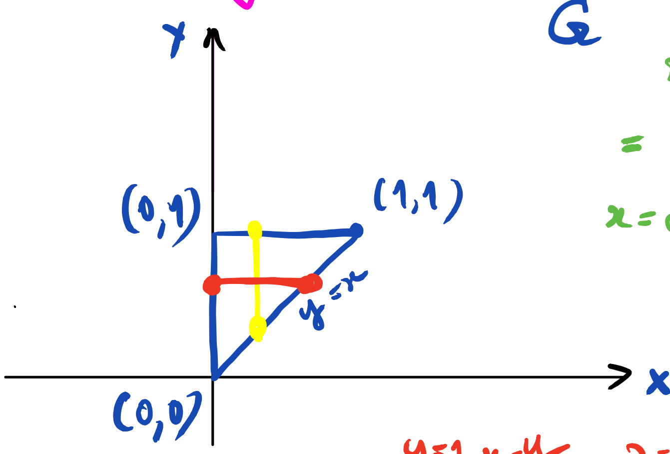


สมการผิวทรงกระบอกคือ

$y^2+z^2=1$

$\Rightarrow z^2 = 1-y^2$

$\Rightarrow z = \sqrt{1-y^2}$

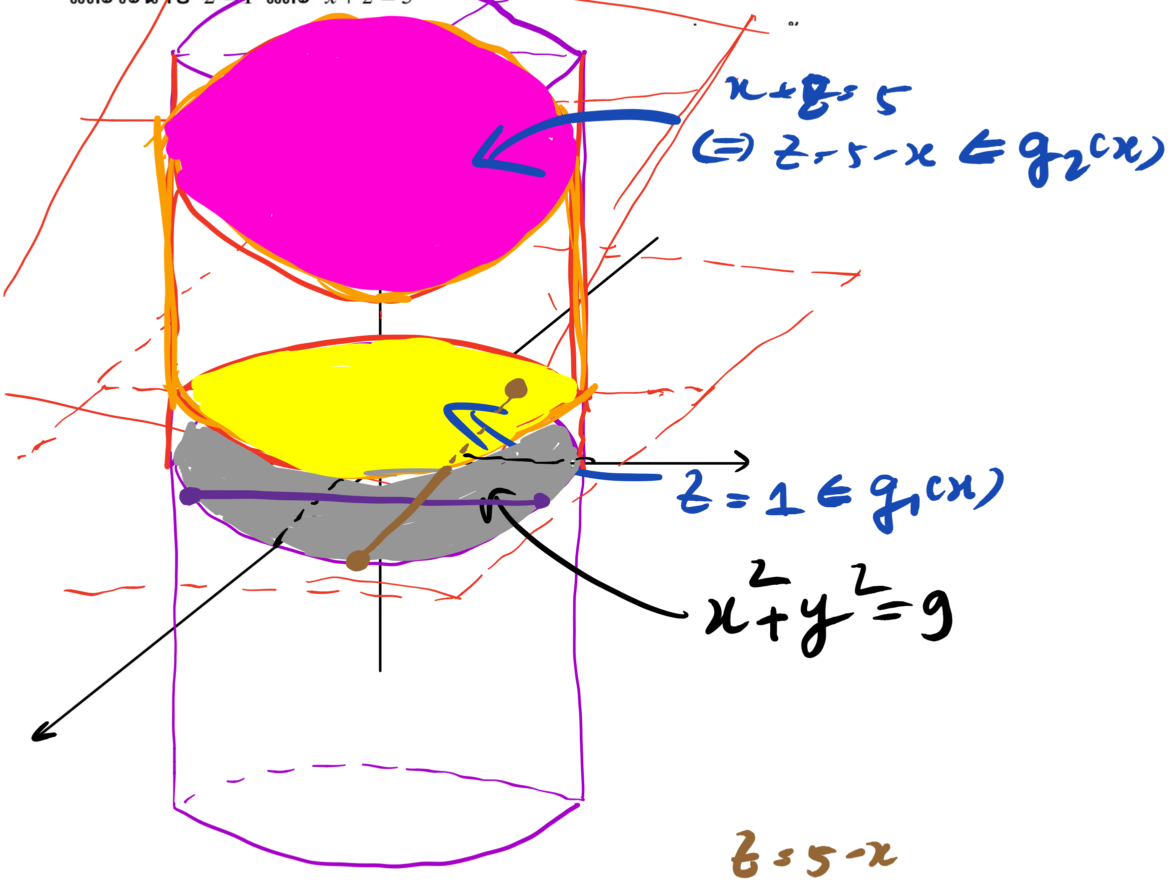


$$\iiint_G f(x,y,z)\,dv = \iint_R \left[\int_{z=0}^{z=\sqrt{1-y^2}} z\,dz\right] dA$$

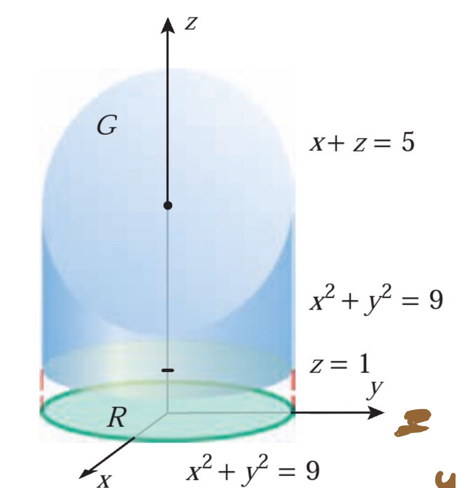
$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x}^{y=1}\left[\int_{z=0}^{z=\sqrt{1-y^2}} z\,dz\right] dy\,dx$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=y}\left[\int_{z=0}^{z=\sqrt{1-y^2}} z\,dz\right] dx\,dy$$

ตัวอย่าง 2.5.3 จงใช้ปริพันธ์สามชั้นหาปริมาตรของรูปทรงที่ล้อมรอบด้วยทรงกระบอก $x^2+y^2=9$ และระนาบ $z=1$ และ $x+z=5$



$$\iiint_{Q} 1\,dV = \iint_{R}\left[\int_{z=1}^{z=5-x} 1\,dz\right] dA$$

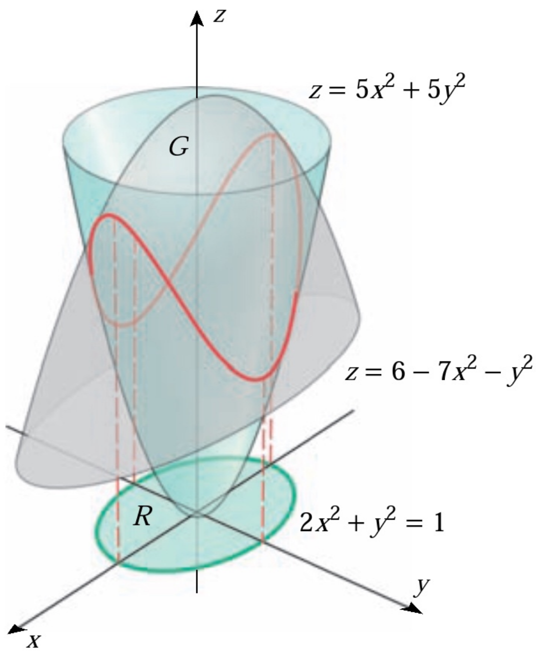


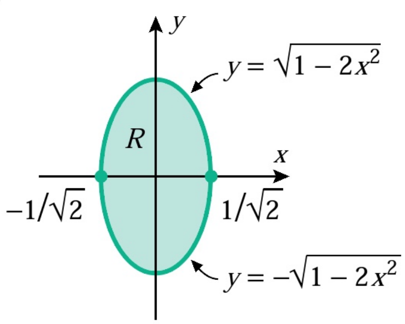
$$= \int_{x=-3}^{x=3}\int_{y=-\sqrt{9-x^2}}^{y=\sqrt{9-x^2}}\left[\int_{z=1}^{z=5-x} 1\,dz\right] dy\,dx$$

$$= \int_{y=-3}^{y=3}\int_{x=-\sqrt{9-y^2}}^{x=\sqrt{9-y^2}}\left[\int_{z=1}^{z=5-x} 1\,dz\right] dx\,dy$$

ตัวอย่าง 2.5.4 จงหาปริมาตรของรูปทรงที่ล้อมรอบโดยทรงพาราโบลา

$z = 5x^2 + 5y^2$ และ $z = 6 - 7x^2 - y^2$



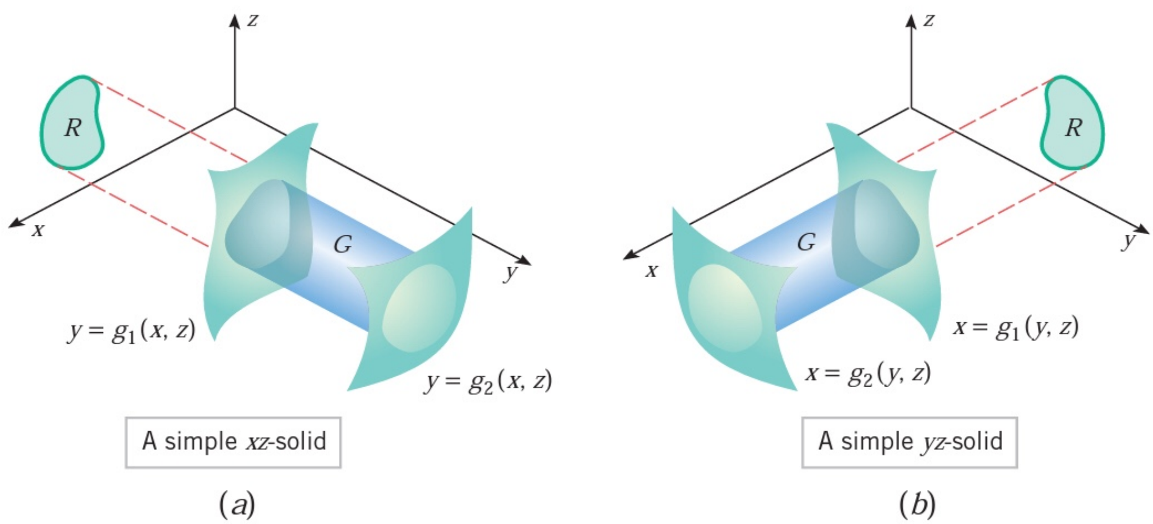


อันดับการหาปริพันธ์แบบอื่น บางครั้งการหาปริพันธ์สามชั้นโดยการหาเทียบกับ x หรือ y ก่อนอาจจะง่ายกว่าการหาเทียบกับ z ก่อน ตัวอย่าง เช่น ถ้ารูปทรง G มีขอบด้านซ้ายและด้านขวาเป็น $y = g_1(x,z)$ และ $y = g_2(x,z)$ และมีขอบด้านข้างเป็นทรงกระบอกขยายไปตามแกน y (ดังรูปที่ 17.5.8a) แล้ว

$$\iiint_G f(x,y,z)dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z)dy\right]dA$$

ทำนองเดียวกัน ถ้ารูปทรง G มีขอบด้านหลังและด้านหน้าเป็น $x = g_1(y,z)$ และ $x = g_2(x,z)$ และมีขอบด้านข้างเป็นทรงกระบอกขยายไปตามแกน x (ดังรูปที่ 17.5.8b) แล้ว

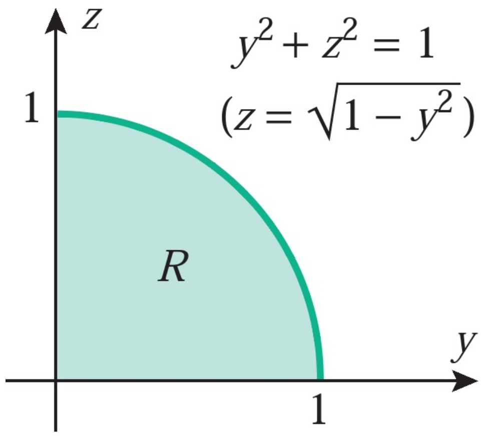
$$\iiint_G f(x,y,z)dV = \iint_R \left[\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)dx\right]dA$$

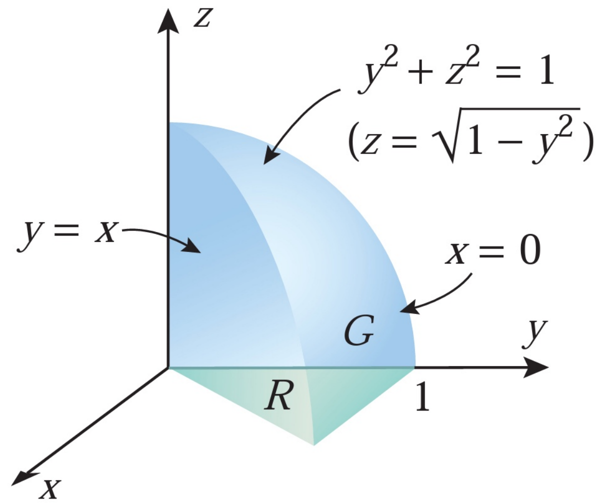


<u>ตัวอย่าง 2.5.5</u> **ในตัวอย่าง 2.5.2 หาค่า**

$$\iiint_G z\,dV$$

บนลิ่มดังในรูปที่ 17.5.5 **โดยการปริพันธ์ครั้งที่หนึ่งเทียบกับ** z **จงหาค่าการปริพันธ์ครั้งที่หนึ่งเทียบกับ** x





.

<u>ตัวอย่าง 2.5.6</u> **จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่อยู่ในอัฐภาคที่ 1 ซึ่งด้านบนล้อมรอบด้วยทรงกลม** $x^2+y^2+z^2=2$ **และด้านล่างล้อมรอบด้วยทางพาราโบลาเชิงวงกลม** $z=x^2+y^2$

<u>ตัวอย่าง 2.5.7</u> **จงหาปริมาตรของทรงตัน** G **ซึ่งล้อมรอบด้วยกราฟ** $z=3x^2,\quad z=4-x^2,\quad y=0$ **และ** $z+y=6$

แบบฝึกหัด!

✔ QUICK CHECK EXERCISES 14.5

(See page 1048 for answers.)

1. The iterated integral

$$\int_1^5 \int_2^4 \int_3^6 f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$$

integrates f over the rectangular box defined by

$\underline{\qquad} \le x \le \underline{\qquad}$, $\underline{\qquad} \le y \le \underline{\qquad}$,

$\underline{\qquad} \le z \le \underline{\qquad}$

2. Let G be the solid in the first octant bounded below by the surface $z = y + x^2$ and bounded above by the plane $z = 4$. Supply the missing limits of integration.

(a) $\displaystyle \iiint_G f(x, y, z)\, dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{y+x^2}^{4} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

(b) $\displaystyle \iiint_G f(x, y, z)\, dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{y+x^2}^{4} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

(c) $\displaystyle \iiint_G f(x, y, z)\, dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

3. The volume of the solid G in Quick Check Exercise 2 is $\underline{\qquad}$.

EXERCISE SET 14.5 C CAS

You try it!

1–8 Evaluate the iterated integral.

1. $\displaystyle \int_{-1}^{1} \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$

2. $\displaystyle \int_{1/3}^{1/2} \int_0^{\pi} \int_0^1 zx \sin xy\, dz\, dy\, dx$

3. $\displaystyle \int_0^2 \int_{-1}^{y^2} \int_{-1}^{z} yz\, dx\, dz\, dy$

4. $\displaystyle \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \int_0^{x^2} x \cos y\, dz\, dx\, dy$

5. $\displaystyle \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^x xy\, dy\, dx\, dz$

6. $\displaystyle \int_1^3 \int_x^{x^2} \int_0^{\ln z} xe^y\, dy\, dz\, dx$

7. $\displaystyle \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-5+x^2+y^2}^{3-x^2-y^2} x\, dz\, dy\, dx$

8. $\displaystyle \int_1^2 \int_z^2 \int_0^{\sqrt{3}y} \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$

9–12 Evaluate the triple integral.

9. $\displaystyle\iiint_G xy \sin yz \, dV$, where G is the rectangular box defined by the inequalities $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le \pi/6$.

10. $\displaystyle\iiint_G y \, dV$, where G is the solid enclosed by the plane $z = y$, the xy-plane, and the parabolic cylinder $y = 1 - x^2$.

11. $\displaystyle\iiint_G xyz \, dV$, where G is the solid in the first octant that is bounded by the parabolic cylinder $z = 2 - x^2$ and the planes $z = 0$, $y = x$, and $y = 0$.

12. $\displaystyle\iiint_G \cos(z/y) \, dV$, where G is the solid defined by the inequalities $\pi/6 \le y \le \pi/2$, $y \le x \le \pi/2$, $0 \le z \le xy$.

C **13.** Use the numerical triple integral operation of a CAS to approximate

$$\iiint_G \frac{\sqrt{x + z^2}}{y} \, dV$$

where G is the rectangular box defined by the inequalities $0 \le x \le 3$, $1 \le y \le 2$, $-2 \le z \le 1$.

C **14.** Use the numerical triple integral operation of a CAS to approximate

$$\iiint_G e^{-x^2-y^2-z^2} \, dV$$

where G is the spherical region $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

15–18 Use a triple integral to find the volume of the solid.

15. The solid in the first octant bounded by the coordinate planes and the plane $3x + 6y + 4z = 12$.

16. The solid bounded by the surface $z = \sqrt{y}$ and the planes $x + y = 1$, $x = 0$, and $z = 0$.

17. The solid bounded by the surface $y = x^2$ and the planes $y + z = 4$ and $z = 0$.

18. The wedge in the first octant that is cut from the solid cylinder $y^2 + z^2 \le 1$ by the planes $y = x$ and $x = 0$.

FOCUS ON CONCEPTS

19. Let G be the solid enclosed by the surfaces in the accompanying figure. Fill in the missing limits of integration.

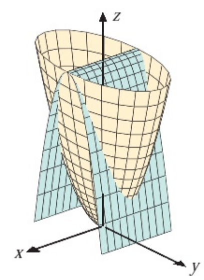
(a) $\displaystyle\iiint_G f(x, y, z) \, dV = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$

(b) $\displaystyle\iiint_G f(x, y, z) \, dV = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$

20. Let G be the solid enclosed by the surfaces in the accompanying figure. Fill in the missing limits of integration.

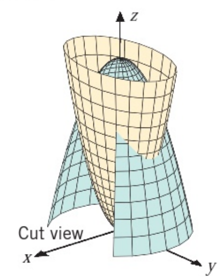
(a) $\displaystyle\iiint_G f(x, y, z) \, dV = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$

(b) $\displaystyle\iiint_G f(x, y, z) \, dV = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$



$z = 4x^2 + y^2$
$z = 4 - 3y^2$

▲ **Figure Ex-19**



$z = 3x^2 + y^2$
$z = 8 - x^2 - y^2$

▲ **Figure Ex-20**

21–24 Set up (but do not evaluate) an iterated triple integral for the volume of the solid enclosed between the given surfaces.

21. The surfaces in Exercise 19.

22. The surfaces in Exercise 20.

23. The elliptic cylinder $x^2 + 9y^2 = 9$ and the planes $z = 0$ and $z = x + 3$.

24. The cylinders $x^2 + y^2 = 1$ and $x^2 + z^2 = 1$.

25–26 In each part, sketch the solid whose volume is given by the integral.

25. (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{y+1} dz \, dy \, dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{9} \int_{0}^{y/3} \int_{0}^{\sqrt{y^2-9x^2}} dz \, dx \, dy$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{2} dy \, dz \, dx$

26. (a) $\displaystyle\int_{0}^{3} \int_{x^2}^{9} \int_{0}^{2} dz \, dy \, dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2} \int_{0}^{2-y} \int_{0}^{2-x-y} dz \, dx \, dy$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{0}^{4-y^2} \int_{0}^{2} dx \, dz \, dy$

27–30 True–False Determine whether the statement is true or false. Explain your answer.

27. If G is the rectangular solid that is defined by $1 \le x \le 3$, $2 \le y \le 5$, $-1 \le z \le 1$, and if $f(x, y, z)$ is continuous on G, then

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \int_1^3 \int_{-1}^1 \int_2^5 f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

28. If G is a simple xy-solid and $f(x, y, z)$ is continuous on G, then the triple integral of f over G can be expressed as an iterated integral whose outermost integration is performed with respect to z.

29. If G is the portion of the unit ball in the first octant, then

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

30. If G is a simple xy-solid and

$$\text{volume of } G = \iiint_G f(x, y, z)\, dV$$

then $f(x, y, z) = 1$ at every point in G.

31. Let G be the rectangular box defined by the inequalities $a \le x \le b, c \le y \le d, k \le z \le l$. Show that

$$\iiint_G f(x)g(y)h(z)\, dV = \left[\int_a^b f(x)\, dx\right]\left[\int_c^d g(y)\, dy\right]\left[\int_k^l h(z)\, dz\right]$$

32. Use the result of Exercise 31 to evaluate

(a) $\iiint_G xy^2 \sin z\, dV$, where G is the set of points satisfying $-1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le \pi/2$;

(b) $\iiint_G e^{2x+y-z}\, dV$, where G is the set of points satisfying $0 \le x \le 1, 0 \le y \le \ln 3, 0 \le z \le \ln 2$.

33–36 The ***average value*** or ***mean value*** of a continuous function $f(x, y, z)$ over a solid G is defined as

$$f_{\text{ave}} = \frac{1}{V(G)} \iiint_G f(x, y, z)\, dV$$

where $V(G)$ is the volume of the solid G (compare to the definition preceding Exercise 61 of Section 14.2). Use this definition in these exercises.

33. Find the average value of $f(x, y, z) = x + y + z$ over the tetrahedron shown in the accompanying figure.

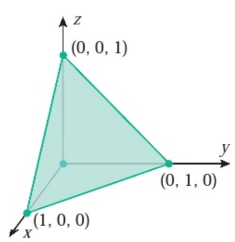


Figure Ex-33

34. Find the average value of $f(x, y, z) = xyz$ over the spherical region $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

C **35.** Use the numerical triple integral operation of a CAS to approximate the average distance from the origin to a point in the solid of Example 4.

C **36.** Let $d(x, y, z)$ be the distance from the point (z, z, z) to the point $(x, y, 0)$. Use the numerical triple integral operation of a CAS to approximate the average value of d for $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, and $0 \le z \le 1$. Write a short explanation as to why this value may be considered to be the average distance between a point on the diagonal from $(0, 0, 0)$ to $(1, 1, 1)$ and a point on the face in the xy-plane for the unit cube $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$, and $0 \le z \le 1$.

37. Let G be the tetrahedron in the first octant bounded by the coordinate planes and the plane

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

(a) List six different iterated integrals that represent the volume of G.

(b) Evaluate any one of the six to show that the volume of G is $\frac{1}{6}abc$.

38. Use a triple integral to derive the formula for the volume of the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

FOCUS ON CONCEPTS

39–40 Express each integral as an equivalent integral in which the z-integration is performed first, the y-integration second, and the x-integration last.

39. (a) $\displaystyle\int_0^5 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

(b) $\displaystyle\int_0^9 \int_0^{3-\sqrt{x}} \int_0^z f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^4 \int_y^{8-y} \int_0^{\sqrt{4-y}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

40. (a) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^{\sqrt{9-y^2-z^2}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

(b) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^2 \int_0^{x/2} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{4-y} \int_0^{\sqrt{z}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

41. Writing The following initial steps can be used to express a triple integral over a solid G as an iterated triple integral: First project G onto one of the coordinate planes to obtain a region R, and then project R onto one of the coordinate axes. Describe how you would use these steps to find the limits of integration. Illustrate your discussion with an example.