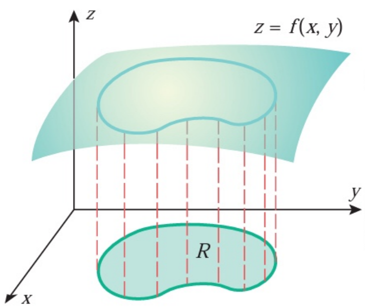
2.4 พื้นที่ของพื้นผิว

(Surface Area)

เราได้ศึกษาเกี่ยวกับการหาพื้นที่ของพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนมาแล้ว ในหัวข้อนี้จะพิจารณาเกี่ยวการหาพื้นที่พื้นผิวในกรณีทั่วไปมากกว่านั้น

ที่มาของสูตรการหาพื้นที่พื้นผิว ปัญหาเกี่ยวกับการหาพื้นที่พื้นผิวที่จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้มีดังนี้

ปัญหา ให้ f เป็นบริเวณปิดของระนาบ xy ต้องการหาพื้นที่ส่วนหนึ่งของพื้นผิว $z = f(x, y)$ ซึ่งภาพฉายบนระนาบ xy เป็นบริเวณ R (ดูรูปที่ 17.4.1)



จะพิจารณาปัญหานี้เป็นขั้นตอน ดังนี้ ขั้นแรกพิจารณากรณีพิเศษคือพื้นผิวเป็นระนาบและบริเวณ R เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก แล้วจึงนำผลที่ได้ไปแก้ปัญหาทั่ว ๆ ไป

ทฤษฎีบท 2.4.1 ให้ R เป็นบริเวณสี่เหลี่ยมมุมฉากปิดในระนาบ xy ถ้า R มีขนาดของด้านเป็น l และ w แล้ว พื้นที่ของพื้นผิว S ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของระนาบ $z = ax + by + c$ ซึ่งมีภาพฉายเป็นบริเวณ R จะกำหนดโดย

$$S = lw\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$$

พิสูจน์ ส่วนของระนาบที่มีภาพฉายเป็นบริเวณ R จะเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน(ดูรูปที่ 17.4.2) ดังนั้นถ้าหาเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ซึ่งเป็นด้านประชิดของสี่เหลี่ยมด้านขนาน แล้วจะได้พื้นที่ของพื้นผิว S จากสูตร

$$S = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

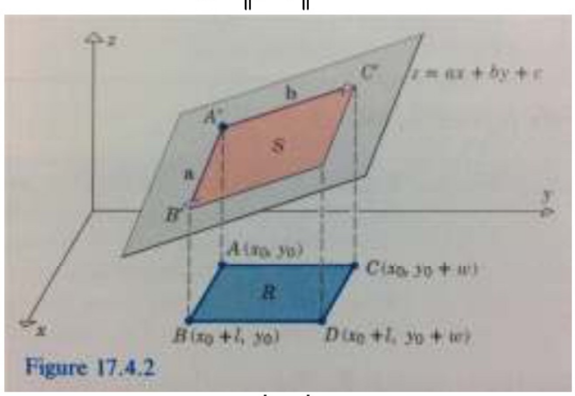


Figure 17.4.2

หาเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ สมมุติว่าจุดมุมของสี่เหลี่ยมมุมฉาก R คือ

$$A(x_0, y_0), \quad B(x_0 + l, y_0), \quad C(x_0, y_0 + w), \quad D(x_0 + l, y_0 + w)$$

(ดูรูปที่ 17.4.2) จะได้ว่าจุดที่อยู่บนระนาบ $z = ax + by + c$ ที่อยู่เหนือจุด A, B และ C คือ

$$A'(x_0, y_0, ax_0 + by_0 + c)$$

$$B'(x_0 + l, y_0, a(x_0 + l) + by_0 + c)$$

$$C'(x_0, y_0 + w, ax_0 + b(y_0 + w) + c)$$

ดังนั้น เวกเตอร์

$$\vec{a} = \overrightarrow{A'B'} = l\vec{i} + 0\vec{j} + al\vec{k}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{A'C'} = 0\vec{i} + w\vec{j} + bw\vec{k}$$

ซึ่งเป็นด้านประชิดของสี่เหลี่ยมด้านขนาน เนื่องจาก

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l & 0 & al \\ 0 & w & bw \end{vmatrix} = -alw\vec{i} - lbw\vec{j} + bw\vec{k}$$

จะได้ว่า

$$S = \left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \sqrt{(-alw)^2 + (-lbw)^2 + (lw)^2} = lw\sqrt{a^2 + b^2 + 1} \qquad \square$$

จะแสดงให้เห็นว่าทฤษฎีบท 2.4.1 สามารถใช้ทำให้ได้สูตรสำหรับหาพื้นที่ของพื้นผิวในกรณีทั่ว ๆ ไปได้อย่างไร

สูตรการหาพื้นที่ของพื้นผิว ถ้า f มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องบนบริเวณปิด R ของระนาบ xy แล้ว พื้นที่ S ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของพื้นผิว $z = f(x, y)$ ซึ่งมีภาพฉายเป็น R คือ

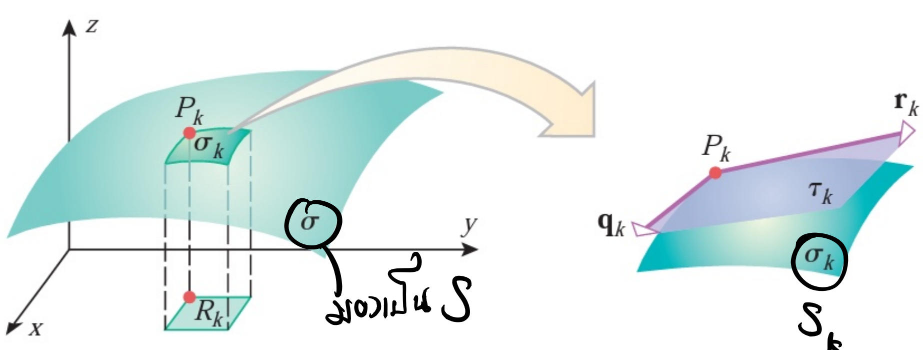
$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dA$$

พิจารณาดังต่อไปนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> ล้อมรอบ R ด้วยสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งด้านขนานกับแกน x และแกน y ใช้เส้นตรงที่ขนานกับแกน X และแกน Y แบ่งสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยและนำสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยที่บรรจุจุดที่อยู่นอก R ออกจากการพิจารณา จะเหลือเฉพาะสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เป็นสับเซตของ R (ดูรูป17.4.3) ให้สี่เหลี่ยมมุมฉากเหล่านี้แทนด้วย

$$R_1, \; R_2, \; \ldots, \; R_n$$

และสมมุติว่าด้านของสี่เหลี่ยมมุมฉาก R_k ยาว Δx_k และ Δy_k



(a) (b)

<u>ขั้นที่ 2</u> เมื่อภาพขึ้นไปบนพื้นผิว $z = f(x, y)$ แต่ละสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยจะทำให้เกิดพื้นที่ที่ไม่เรียบบนพื้นผิว(ดูรูปที่ 17.4.3a) ถ้าแทนพื้นที่ที่ไม่เรียบเหล่านี้ด้วย

$$S_1,\ \ S_2, \ldots, S_n$$

จะได้ว่าพื้นที่ของพื้นผิว S ทั้งหมดประมาณได้ด้วยผลบวกของพื้นที่ผิวที่ไม่เรียบเหล่านี้

$$S \approx S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

<u>ขั้นที่ 3</u> ทีนี้ประมาณค่าของพื้นที่

$$S_1,\ \ S_2, \ldots, S_n$$

ให้ (x_k^*, y_k^*) เป็นจุดใด ๆ ในสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยที่ k และข้างบนของจุดนี้สร้างระนาบสัมผัสพื้นผิว $z = f(x, y)$ (ดูรูปที่ 17.4.3b) โดยทฤษฎีบท 2.4.1 จะได้ว่าสมการของระนาบสัมผัสจะอยู่ในรูป

$$z = f_x(x_k^*, y_k^*)x + f_y(x_k^*, y_k^*)y + c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวที่เหมาะสม ถ้าสี่เหลี่ยมมุมฉาก R_k มีขนาดเล็ก จะได้ว่าสามารถประมาณพื้นที่ S_k ของพื้นที่ที่ไม่เรียบบนพื้นผิวโดยส่วนหนึ่งของพื้นที่บนระนาบสัมผัสบน R_k (ดูรูปที่ 17.4.3b) ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.4.1 จะได้ว่า

$$S_k \approx \sqrt{(f_x(x_k^*, y_k^*))^2 + (f_y(x_k^*, y_k^*))^2 + 1}\Delta x_k \Delta y_k$$

แทนค่าผลที่ได้นี้และเขียนพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยที่ k ด้วย $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ จะได้ผลบวกรีมันน์

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(f_x(x_k^*, y_k^*))^2 + (f_y(x_k^*, y_k^*))^2 + 1}\Delta A_k$$

<u>ขั้นที่ 4</u> จะมีความคลาดเคลื่อนสำหรับการประมาณค่านี้สองส่วนด้วยกัน คือ ส่วนแรกสี่เหลี่ยมมุมฉาก R_1, $R_2, \ldots, R_n$ ไม่เต็ม R อย่างสมบูรณ์ ส่วนที่สองการแทนค่าพื้นที่ที่ไม่เรียบบนพื้นผิวด้วยพื้นที่บนระนาบสัมผัส อย่างไรก็ตามให้ทำกระบวนการประมาณค่านี้ซ้ำและให้สี่เหลี่ยมมุมฉากเพิ่มขึ้นแต่ขนาดลดลงจะทำให้ความคลาดเคลื่อนทั้งสองส่วนลดลง จะได้พื้นที่ของพื้นผิว S คือ

$$S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(f_x(x_k^*, y_k^*))^2 + (f_y(x_k^*, y_k^*))^2 + 1}\Delta A_k$$

หรือ

$$S = \iint_R \sqrt{(f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2 + 1}\, dA$$

นั่นคือ สูตรการหาพื้นที่ผิว S คือ

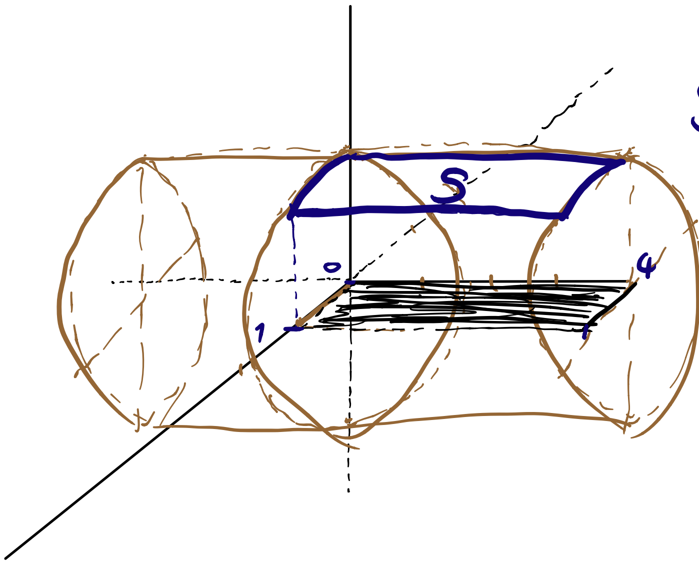
$$S = \iint_R \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\, dA$$

$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

R ← ห้องฉายภาพ

ตัวอย่าง 2.4.1 จงหาพื้นที่ของพื้นผิวของส่วนของทรงกระบอก $x^2+z^2=4$ ที่อยู่เหนือสี่เหลี่ยมมุมฉาก $R=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 4\}$ ในระนาบ xy

$z^2 = 4-x^2 \Rightarrow z=\sqrt{4-x^2}$



$$S = \iint_R \sqrt{(z_x)^2+(z_y)^2+1}\,dA$$

พิจารณา

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = ?$$

จาก $x^2+z^2=4$

$$\frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial z^2}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial 4}{\partial x}$$

$$\Rightarrow 2x + 2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{2z} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

พิจารณา $z_y = \frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial z^2}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial 4}{\partial y}$

$$\Rightarrow 0 + 2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ดังนั้น $S = \iint_R \sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,dA$

$$= \int_{y=0}^{y=4}\int_{x=0}^{x=1} \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2+0^2+1^2}\,dx\,dy$$

$$= \int^{y=4}\int^{x=1} \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2+1}\,dx\,dy$$

ตัวอย่าง 2.4.3 จงหาพื้นที่ของพื้นผิวส่วนของ $f(x,y)=\frac{2}{3}x^{3/2}$ ที่อยู่เหนือสี่เหลี่ยมมุมฉาก $R=\{(x,y):0\le x\le 3, 0\le y\le 2\}$ ในระนาบ XY

วิธีทำ

จากสูตร $$S=\iint_R \sqrt{(z_x)^2+(z_y)^2+1}\,dA$$

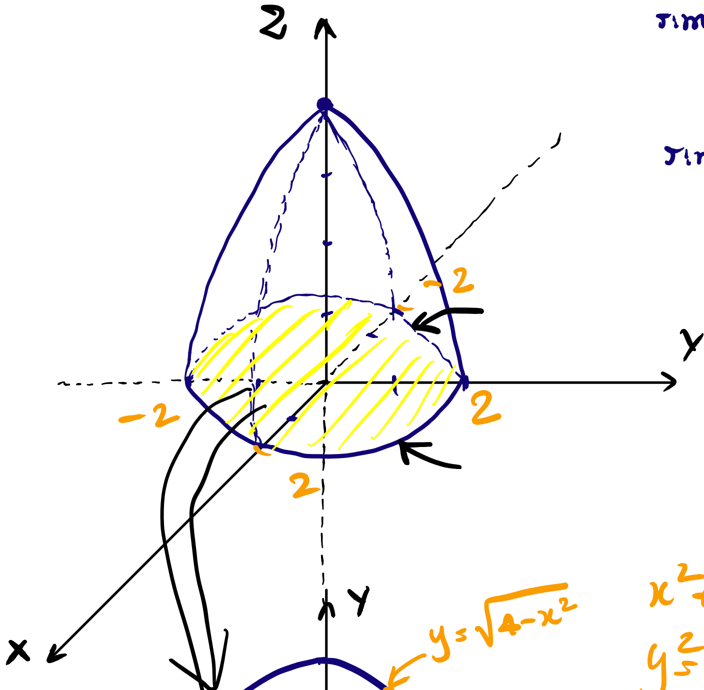
หา $z_x, z_y = ?$ $$\Rightarrow z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)=x^{1/2}$$

$$\Rightarrow z_y=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)=0$$

ดังนั้น $$S=\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=0}^{x=3}\sqrt{(x^{1/2})^2+0^2+1^2}\,dx\,dy$$

$$=\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=0}^{x=3}\sqrt{x+1}\,dx\,dy$$ ■

ตัวอย่าง 2.4.4 จงหาพื้นที่ของพื้นผิวส่วนของทรงพาราโบลาเชิงวงกลม $z = 4 - x^2 - y^2$ ซึ่งอยู่บนระนาบ XY



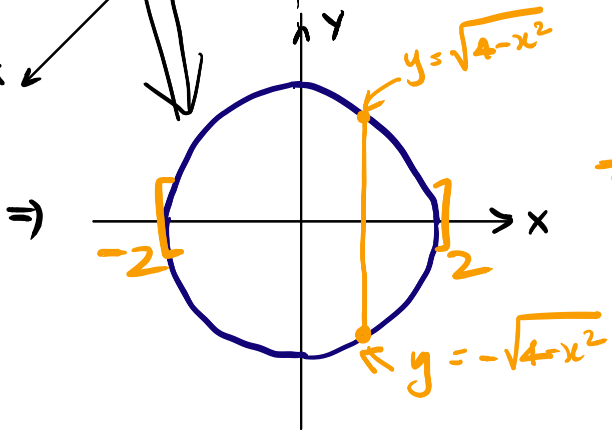
ระนาบ $z=4$; $4 = 4 - x^2 - y^2$

$\Rightarrow 0 = x^2 + y^2$

ระนาบ $z=0$; $0 = 4 - x^2 - y^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2^2$



$x^2 + y^2 = 4$

$y^2 = 4 - x^2$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

พิจารณา $z = 4 - x^2 - y^2$

$\Rightarrow z_x = -2x$

$\Rightarrow z_y = -2y$

$$S = \iint_R \sqrt{(z_x)^2 + (z_y)^2 + 1}\, dA$$

$$= \int_{x=-2}^{x=2} \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1}\, dy\, dx$$

$$\left[= \int^{y=2} \int^{x=\sqrt{4-y^2}} \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1}\, dx\, dy \right]$$

$y=-2$ $x=-\sqrt{4-y^2}$ **แบบฝึกหัด!**

Quick Check!

The surface area of a surface of the form $z = f(x, y)$ over a region R in the xy-plane is given by

$$S = \iint_R \underline{\hspace{3cm}}\, dA$$

1–4 Express the area of the given surface as an iterated double integral, and then find the surface area. ■

1. The portion of the cylinder $y^2 + z^2 = 9$ that is above the rectangle $R = \{(x, y) : 0 \le x \le 2,\ -3 \le y \le 3\}$.
2. The portion of the plane $2x + 2y + z = 8$ in the first octant.
3. The portion of the cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ that is above the region in the first quadrant bounded by the line $y = x$ and the parabola $y = x^2$.
4. The portion of the surface $z = 2x + y^2$ that is above the triangular region with vertices $(0, 0)$, $(0, 1)$, and $(1, 1)$.

5–10 Express the area of the given surface as an iterated double integral in polar coordinates, and then find the surface area. ■

5. The portion of the cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ that lies inside the cylinder $x^2 + y^2 = 2x$.
6. The portion of the paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ that is above the xy-plane.
7. The portion of the surface $z = xy$ that is above the sector in the first quadrant bounded by the lines $y = x/\sqrt{3}$, $y = 0$, and the circle $x^2 + y^2 = 9$.
8. The portion of the paraboloid $2z = x^2 + y^2$ that is inside the cylinder $x^2 + y^2 = 8$.
9. The portion of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ between the planes $z = 1$ and $z = 2$.
10. The portion of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ that is inside the cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.