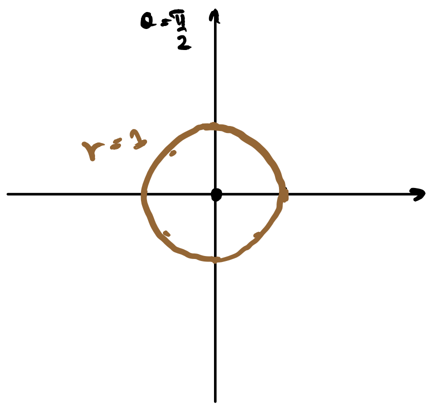
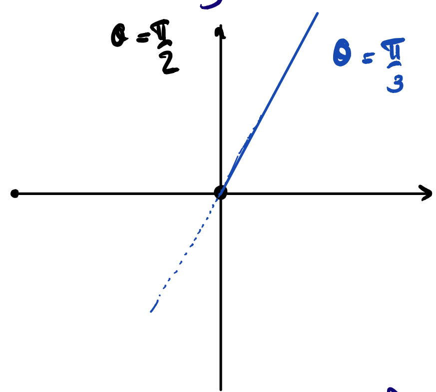
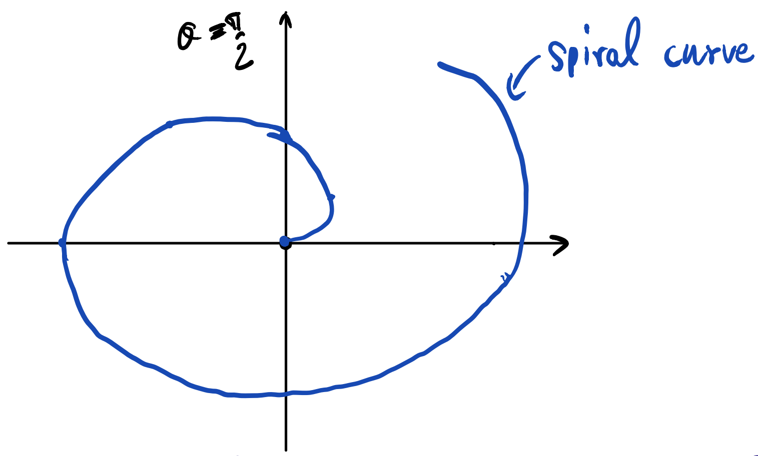
⊛ กราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว ⊛ [$r = f(\theta)$]

Example จงวาดกราฟ $r = 1$ และ $\theta = \frac{\pi}{3}$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

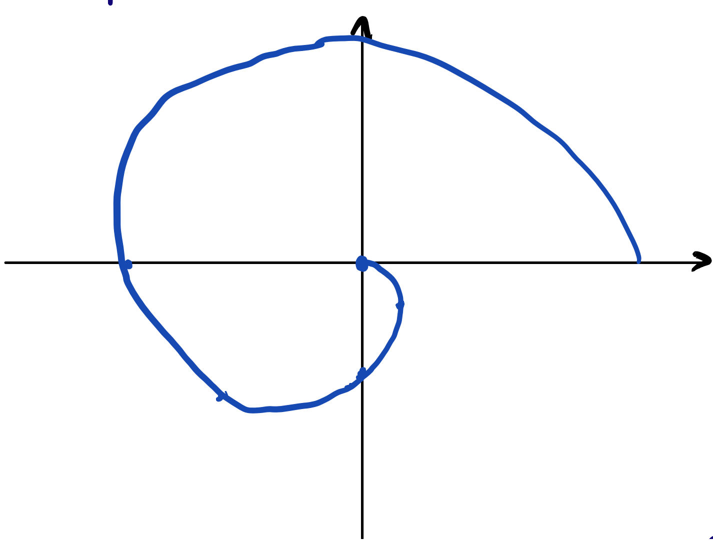




Example: กำหนดให้ $\theta \geq 0$ จงวาดกราฟ $r = \theta$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



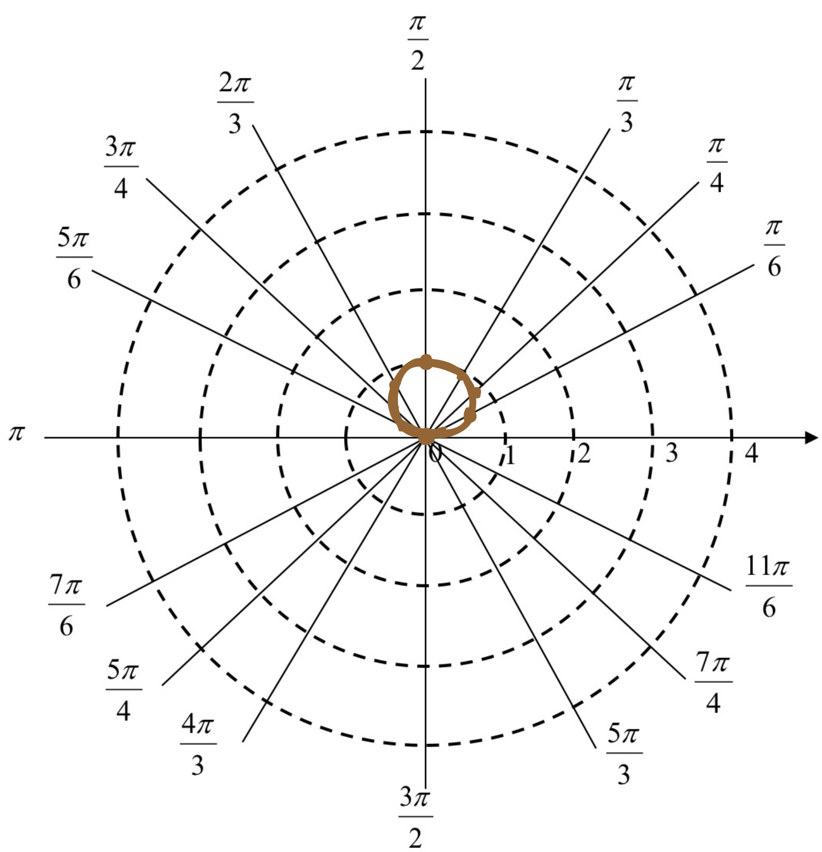
Example: กำหนดให้ $\theta \leq 0$ จงวาดกราฟ $r = \theta$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



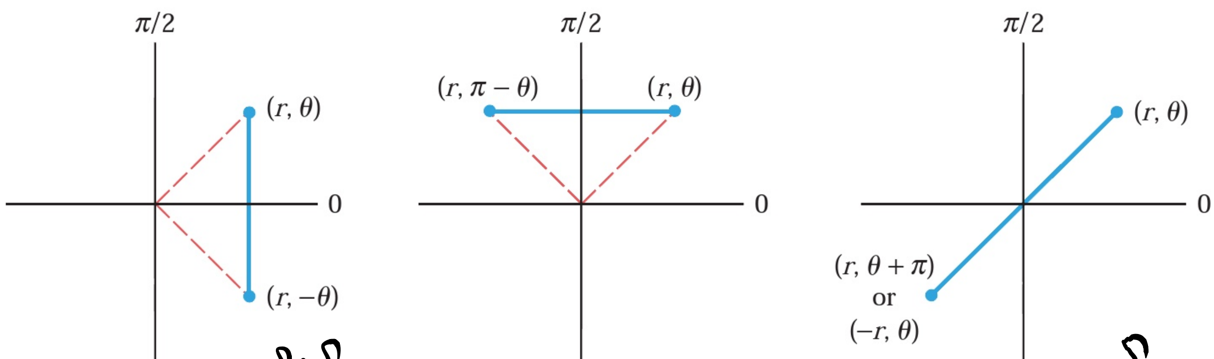
Example: จงวาดกราฟของสมการ $r = \sin\theta$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

วิธีทำ [ตรวจอย่างรวดเร็ว ⇒ ลงจุดก่อน]

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$r = \sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
θ	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$r = \sin\theta$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
θ	2π							
$r = \sin\theta$	0							



- การสมมาตรของกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว $[r = f(\theta)]$
  - กราฟสมมาตรกับ "จุดขั้ว" $\Leftrightarrow$ แทน "r" ด้วย "$-r$" แล้วสมการคงเดิม
  - กราฟสมมาตรกับ "แกนเชิงขั้ว" $\Leftrightarrow$ แทน θ ด้วย $-\theta$ แล้วสมการคงเดิม
  - กราฟสมมาตรกับ "เส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$" $\Leftrightarrow$ แทน r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $-\theta$ แล้วสมการคงเดิม



สมมาตรกับแกนเชิงขั้ว   สมมาตรกับ $\theta = \frac{\pi}{2}$ สมมาตรกับจุดขั้ว

Example: จงตรวจสอบการสมมาตรและวาดกราฟของสมการต่อไปนี้

① $r = \cos\theta$

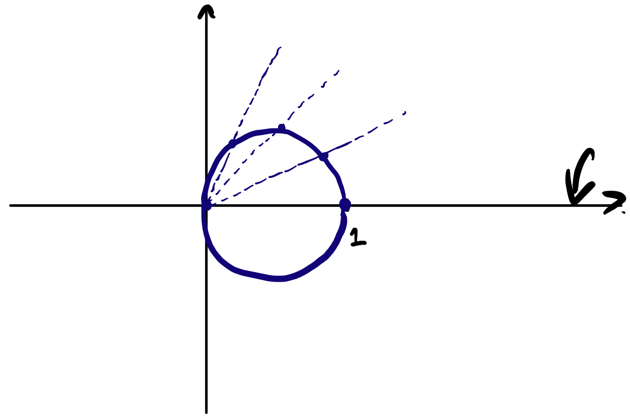
วิธีทำ [ตรวจสอบการสมมาตร]

- สมมาตรกับจุดขั้ว [แทน r ด้วย $-r$] $\Rightarrow -r = \cos\theta$ ✗
- สมมาตรกับแกนเชิงขั้ว [แทน θ ด้วย $-\theta$] $\Rightarrow r = \cos(-\theta)$

  $\Rightarrow r = \cos\theta$ ✓
- สมมาตรกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$ [แทน r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $-\theta$]

  $\Rightarrow -r = \cos(-\theta) \Rightarrow -r = \cos\theta$ ✗

[วาดกราฟ!]



② $r = 1 - \cos\theta$

[ตรวจสอบการสมมาตร]

① จุดขั้ว : $r \Rightarrow -r$

$-r = 1 - \cos\theta$ ✗

(★) ② แกนเชิงขั้ว $\theta \Rightarrow -\theta$

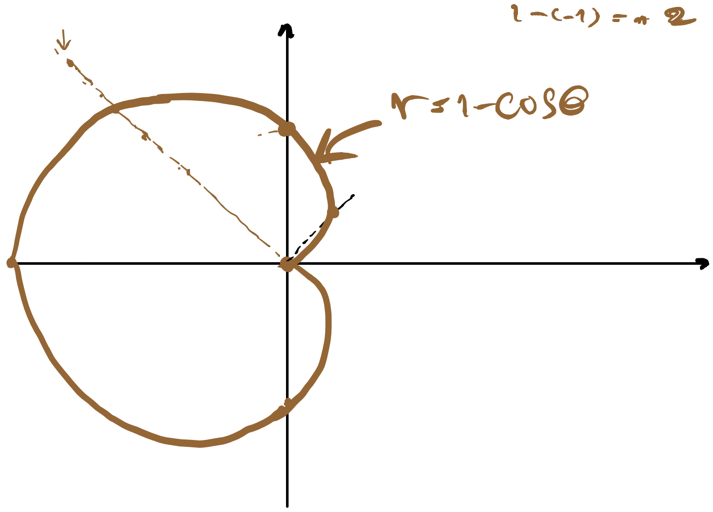
$r = 1 - \cos(-\theta) \Rightarrow r = 1 - \cos\theta$ ✓

③ $\theta = \frac{\pi}{2}$: ① [$r = -r$ และ $\theta = -\theta$] / [$\theta \Rightarrow \pi - \theta$]

$-r = 1 - \cos(-\theta) \Rightarrow -r = 1 - \cos\theta$ ✗

[วาดกราฟ!] $r = 1 - \cos\theta$

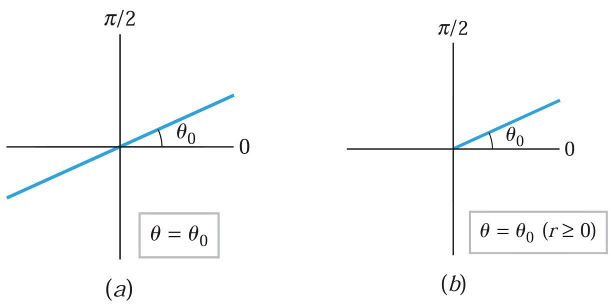
$1 - (-1) = 2$ $\frac{3\pi}{4} \Rightarrow r = 1 - (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + 0.7$



จงศึกษากราฟต่าง ๆ

FAMILIES OF LINES AND RAYS THROUGH THE POLE

If θ_0 is a fixed angle, then for all values of r the point (r, θ_0) lies on the line that makes an angle of $\theta = \theta_0$ with the polar axis; and, conversely, every point on this line has a pair of polar coordinates of the form (r, θ_0). Thus, the equation $\theta = \theta_0$ represents the line that passes through the pole and makes an angle of θ_0 with the polar axis (Figure 10.2.17*a*). If r is restricted to be nonnegative, then the graph of the equation $\theta = \theta_0$ is the ray that emanates from the pole and makes an angle of θ_0 with the polar axis (Figure 10.2.17*b*). Thus, as θ_0 varies, the equation $\theta = \theta_0$ produces either a family of lines through the pole or a family of rays through the pole, depending on the restrictions on r.



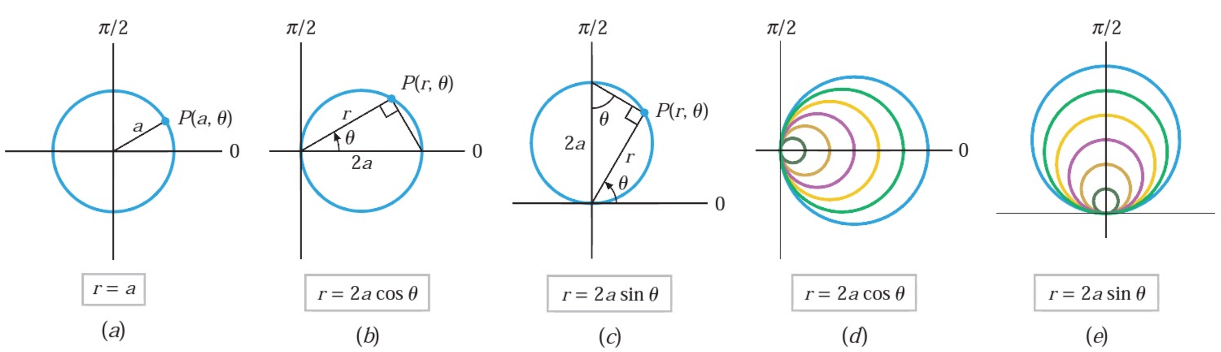
▲ **Figure 10.2.17**

FAMILIES OF CIRCLES

We will consider three families of circles in which a is assumed to be a positive constant:

$$r = a \qquad r = 2a\cos\theta \qquad r = 2a\sin\theta \tag{3–5}$$

The equation $r = a$ represents a circle of radius a centered at the pole (Figure 10.2.18*a*). Thus, as a varies, this equation produces a family of circles centered at the pole. For families (4) and (5), recall from plane geometry that a triangle that is inscribed in a circle with a diameter of the circle for a side must be a right triangle. Thus, as indicated in Figures 10.2.18*b* and 10.2.18*c*, the equation $r = 2a\cos\theta$ represents a circle of radius a, centered on the x-axis and tangent to the y-axis at the origin; similarly, the equation $r = 2a\sin\theta$ represents a circle of radius a, centered on the y-axis and tangent to the x-axis at the origin. Thus, as a varies, Equations (4) and (5) produce the families illustrated in Figures 10.2.18*d* and 10.2.18*e*.



▲ **Figure 10.2.18**

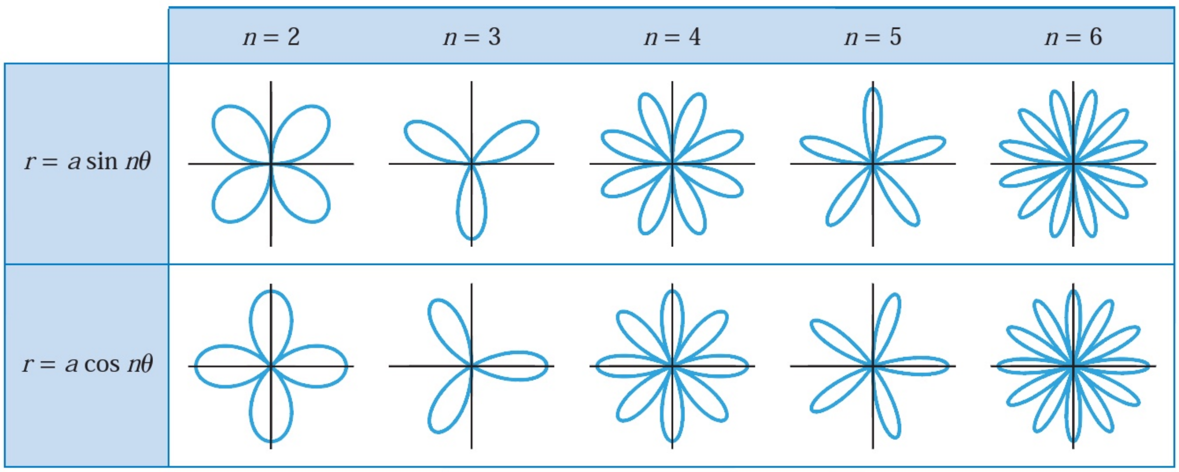
FAMILIES OF ROSE CURVES

In polar coordinates, equations of the form

$$r = a\sin n\theta \qquad r = a\cos n\theta \tag{6–7}$$

in which $a > 0$ and n is a positive integer represent families of flower-shaped curves called ***roses*** (Figure 10.2.19). The rose consists of n equally spaced petals of radius a if n is odd and $2n$ equally spaced petals of radius a if n is even. It can be shown that a rose with an even number of petals is traced out exactly once as θ varies over the interval $0 \le \theta < 2\pi$ and a rose with an odd number of petals is traced out exactly once as θ varies over the interval $0 \le \theta < \pi$ (Exercise 78).

ROSE CURVES



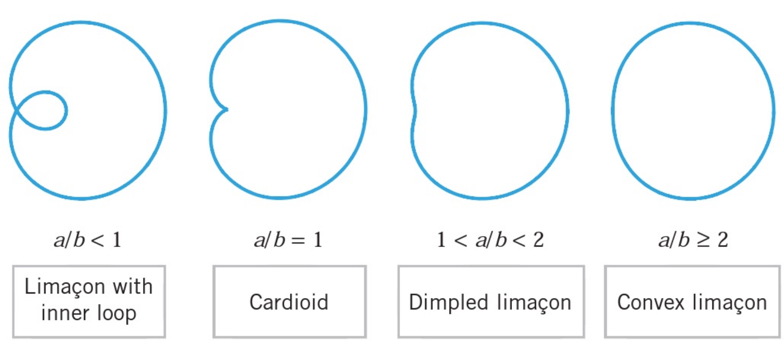
▲ **Figure 10.2.19**

FAMILIES OF CARDIOIDS AND LIMAÇONS

Equations with any of the four forms

$$r = a \pm b\sin\theta \qquad r = a \pm b\cos\theta \tag{8–9}$$

in which $a > 0$ and $b > 0$ represent polar curves called ***limaçons*** (from the Latin word *limax* for a snail-like creature that is commonly called a "slug"). There are four possible shapes for a limaçon that are determined by the ratio a/b (Figure 10.2.20). If $a = b$ (the case $a/b = 1$), then the limaçon is called a ***cardioid*** because of its heart-shaped appearance, as noted in Example 8.



▶ **Figure 10.2.20**

แบบฝึกหัด

21–46 Sketch the curve in polar coordinates.

✓**21.** $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ ✓**22.** $\theta = -\dfrac{3\pi}{4}$ ✓**23.** $r = 3$

✓**24.** $r = 4\cos\theta$ ✓**25.** $r = 6\sin\theta$ ✓**26.** $r - 2 = 2\cos\theta$

✓**27.** $r = 3(1 + \sin\theta)$ ✓**28.** $r = 5 - 5\sin\theta$

✓**29.** $r = 4 - 4\cos\theta$ ✓**30.** $r = 1 + 2\sin\theta$

✓**31.** $r = -1 - \cos\theta$ ✓**32.** $r = 4 + 3\cos\theta$

✓**33.** $r = 3 - \sin\theta$ ✓**34.** $r = 3 + 4\cos\theta$

✓**35.** $r - 5 = 3\sin\theta$ ✓**36.** $r = 5 - 2\cos\theta$

✓**37.** $r = -3 - 4\sin\theta$ **38.** $r^2 = \cos 2\theta$

39. $r^2 = 16\sin 2\theta$ **40.** $r = 4\theta \quad (\theta \geq 0)$

41. $r = 4\theta \quad (\theta \leq 0)$ **42.** $r = 4\theta$

43. $r = -2\cos 2\theta$ **44.** $r = 3\sin 2\theta$

45. $r = 9\sin 4\theta$ **46.** $r = 2\cos 3\theta$

47–50 True–False Determine whether the statement is true or false. Explain your answer.

47. The polar coordinate pairs $(-1, \pi/3)$ and $(1, -2\pi/3)$ describe the same point.

48. If the graph of $r = f(\theta)$ drawn in rectangular θr-coordinates is symmetric about the r-axis, then the graph of $r = f(\theta)$ drawn in polar coordinates is symmetric about the x-axis.

✗ **49.** The portion of the polar graph of $r = \sin 2\theta$ for values of θ between $\pi/2$ and π is contained in the second quadrant.

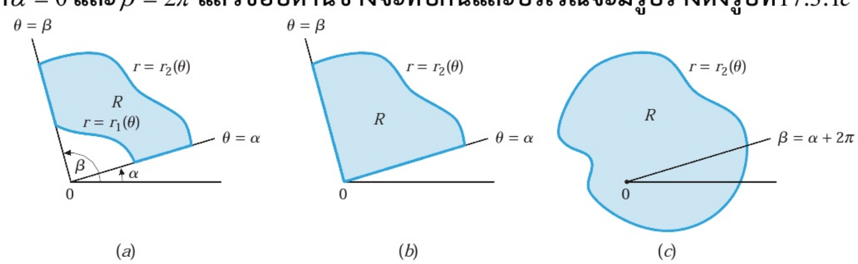
50. The graph of a dimpled limaçon passes through the polar origin.

2.3 ปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว

(Double Integrals in Polar Coordinates)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาเกี่ยวกับปริพันธ์สองชั้นซึ่งตัวที่ถูกหาปริพันธ์และบริเวณที่จะหาปริพันธ์อยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้ว การหาปริพันธ์แบบนี้มีความสำคัญด้วยเหตุผลสองอย่างด้วยกัน คือ อย่างที่หนึ่งมีการนำไปประยุกต์ใช้ในหลาย ๆ อย่างด้วยกัน อย่างที่สองมีการหาปริพันธ์สองชั้นเป็นจำนวนมากที่อยู่ในรูปพิกัดฉากถ้าเปลี่ยนให้อยู่พิกัดเชิงขั้วแล้วจะหาค่าได้ง่ายกว่า

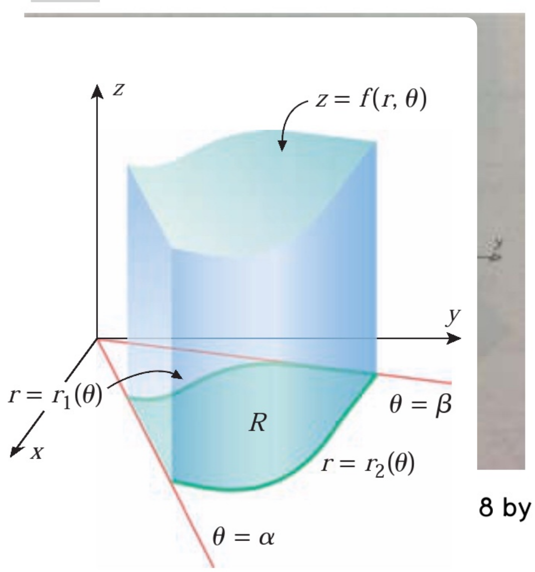
<u>นิยามของปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว</u> ปริพันธ์สองชั้นซึ่งตัวถูกหาปริพันธ์กำหนดขึ้นจากปัญหาการหาปริมาตร ซึ่งบริเวณฐาน R สามารถเขียนให้อยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้วได้ง่ายกว่าที่จะเขียนให้อยู่ในรูปพิกัดฉาก โดยทั่วไปบริเวณ R จะอยู่รูปดังที่แสดงดังรูปที่ 17.3.1a บริเวณนี้จะบรรจุจุดทั้งหมดที่ล้อมรอบด้วยสองรังสี $\theta = \alpha$ และ $\theta = \beta$ และโค้งเชิงขั้วสองอัน $r = r_1(\theta)$ และ $r = r_2(\theta)$ ซึ่ง $\alpha \le \beta$ และ $0 \le r_1(\theta) \le r_2(\theta)$ สำหรับ $\alpha \le \theta \le \beta$ และ $\beta - \alpha \le 2\pi$ จะเรียกบริเวณนี้ว่า บริเวณเชิงขั้วอย่างง่าย ในกรณีที่ $r_1(\theta)$ เป็นศูนย์ กล่าวคือ ขอบในของบริเวณเชิงขั้วเป็นจุด(จุดกำเนิด) และบริเวณจะมีรูปร่างดังแสดงในรูปที่ 17.3.1b ถ้าเพิ่มเติมสมบัติอีกว่า $\alpha = 0$ และ $\beta = 2\pi$ แล้วขอบด้านข้างจะทับกันและบริเวณจะมีรูปร่างดังรูปที่ 17.3.1c



Simple polar regions

แนวคิดของปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว เกิดจากปัญหาของการหาปริมาตร ดังต่อไปนี้

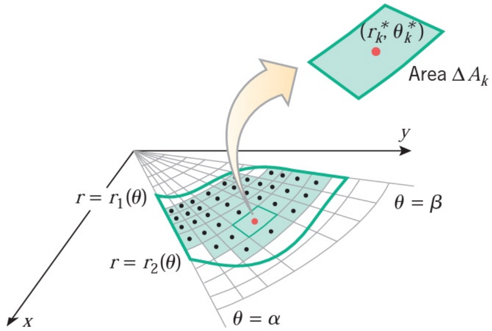
<u>ปัญหา</u> จงหาปริมาตรของรูปทรงที่บรรจุจุดที่อยู่ระหว่างบริเวณเชิงขั้ว R ในระนาบ XY และพื้นผิวซึ่งมีสมการในพิกัดทรงกระบอก $z = f(r,\theta)$ ซึ่ง f ต่อเนื่องบนบริเวณ R และ $f(r,\theta)$ ทุกค่า (r,θ) ใน R (ดูรูปที่ 17.3.2)



วิธีการหาปริมาตร V ของรูปทรงในรูปที่ 17.3.2 จะมีขั้นตอนเช่นเดียวกับกรณีของพิกัดฉาก ยกเว้นแต่ว่าบริเวณ R จะถูกแบ่งด้วยส่วนโค้งของวงกลมกับรังสีแทนเส้นตรงที่ขนานกับแกน X และแกน Y โดยมีขั้นตอนดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> สร้างตระแกรงข่ายของส่วนโค้งของวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและรังสีที่ออกจากจุดกำเนิดคลุมบริเวณ R ดังรูปที่17.3.3 ตารางที่เกิดจากตระแกรงข่ายนี้เรียกว่า สี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้ว จะไม่พิจารณาสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้วย่อยที่บรรจุจุดที่ไม่อยู่ใน R จะเหลือพิจารณาเฉพาะสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้วที่เป็นสับเซตของ R แทนพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้วเหล่านี้ด้วย

$$\Delta A_1,\ \Delta A_2, \ldots, \Delta A_n$$



▲ **Figure 14.3.5**

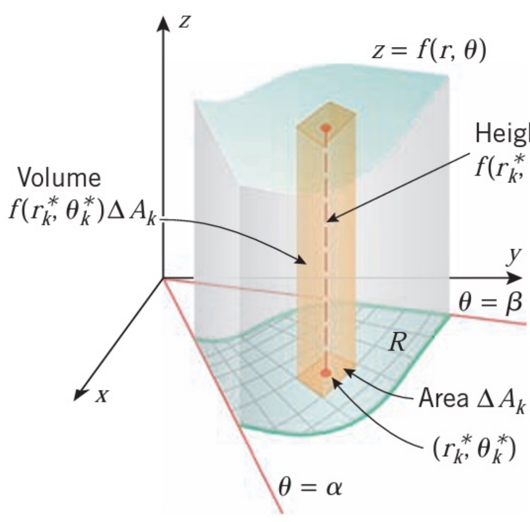
<u>ขั้นที่ 2</u> เลือกจุดใด ๆ ที่อยู่ภายในสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้วย่อยเหล่านี้ และแทนด้วย

$$(r_1^*, \theta_1^*), (r_2^*, \theta_2^*), \ldots, (r_n^*, \theta_n^*)$$

ดังแสดงในรูปที่17.3.4 ผลคูณ $f(r_k^*, \theta_k^*)\Delta A_k$ คือปริมาตรของรูปทรงซึ่งพื้นที่ฐานเป็น ΔA_k และมีความสูงเป็น $f(r_k^*, \theta_k^*)$ ดังนั้นผลบวก

$$\sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*)\Delta A_k$$

สามารถมองเป็นค่าประมาณของปริมาตร V ของรูปทรงทั้งหมด



▲ **Figure 14.3.6**

ขั้นที่ 3 ถ้ากระทำกระบวนการข้างต้นซ้ำอีกโดยการเพิ่มจำนวนส่วนย่อยที่แบ่ง ซึ่งจะทำให้ขนาดของสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้วมีค่าเข้าใกล้ศูนย์แล้ว จะทำให้ความคาดเคลื่อนของการประมาณมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และปริมาตรของรูปทรงคือ

$$V = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*)\Delta A_k$$

ผลบวกในขั้นที่ 3 เรียกว่าผลบวกรีมันน์เชิงขั้ว (Polar Riemann sum) ลิมิตของผลบวกรีมันน์เชิงขั้วเขียนแทนด้วย

$$\iint_R f(r,\theta)dA = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*)\Delta A_k$$

ซึ่งเรียกว่าปริพันธ์สองชั้นเชิงขั้ว (polar double integral) ของ $f(r,\theta)$ บน R ด้วยสัญลักษณ์นี้ปริมาตรของรูปทรงสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$V = \iint_R f(r,\theta)dA$$

ถ้า $f(r,\theta)$ มีค่าเป็นได้ทั้งบวกและลบบน R แล้ว ดังที่เคยพิจารณามาแล้วปริพันธ์สองชั้นเชิงขั้ว จะแทนปริมาตรที่มีเครื่องหมายระหว่าง $z = f(r,\theta)$ และ R นั่นคือเป็นผลต่างระหว่างปริมาตรของรูปทรงที่อยู่เหนือ R แต่อยู่ใต้ $z = f(r,\theta)$ กับปริมาตรของรูปทรงที่อยู่ใต้ R แต่อยู่เหนือ $z = f(r,\theta)$

สามารถแสดงได้ว่าปริพันธ์สองชั้นเชิงขั้วมีสมบัติเช่นเดียวกับสมบัติของปริพันธ์สองชั้นในพิกัดฉาก ที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 2.1 นอกจากนี้ยังสามารถใช้หาพื้นที่ได้เช่นเดียวกับที่พิจารณามาแล้วในหัวข้อ 2.2 พื้นที่ของบริเวณเชิงขั้วอย่างง่าย R จะเขียนอยู่ในรูป

$$\text{พื้นที่ของ } R = \iint_R dA$$

การหาค่าปริพันธ์สองชั้นเชิงขั้ว ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยให้สามารถหาค่าปริพันธ์สองชั้นเชิงขั้วได้ด้วยการหาค่าปริพันธ์ซ้อน

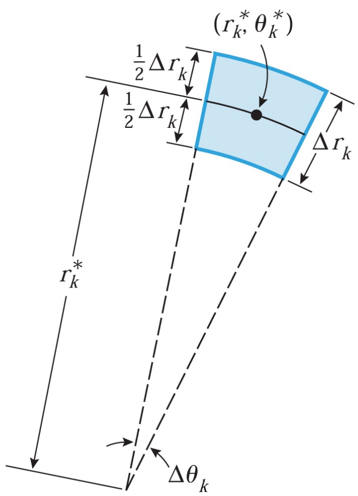
ทฤษฎีบท 2.3.1 ถ้า R เป็นบริเวณในรูปแบบที่แสดงในรูป 17.3.1 และถ้า $f(r,\theta)$ ต่อเนื่องบน R แล้ว

$$\iint_R f(r,\theta)dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta)r\,dr\,d\theta$$

ข้อสังเกต ในสูตรการหาค่าปริพันธ์ จะเห็นว่า dA ในปริพันธ์สองชั้นจะเปลี่ยนไปเป็น $r\,dr\,d\theta$ ในปริพันธ์ซ้อน

จะไม่พิสูจน์ทฤษฎีบทนี้อย่างเป็นทางการ แต่อย่างไรก็ตาม การที่ปรากฏว่ามีตัวประกอบ r ในปริพันธ์ซ้อนอาจจะอธิบายได้โดยให้ดูที่นิยาม

$$\iint_R f(r,\theta)dA = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*)\Delta A_k$$



▲ **Figure 14.3.7**

ในผลบวกรีมันน์เชิงขั้ว $\sum_{k=1}^{n} f(r_k^*,\theta_k^*)\Delta A_k$ สมมุติว่าจุดใด ๆ (r_k^*,θ_k^*) ถูกเลือกเป็นจุดกึ่งกลางของสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้วที่ k นั่นคือเป็นจุดที่อยู่ครึ่งทางระหว่างขอบโค้งวงกลมและอยู่บนรังสีที่แบ่งครึ่งรังสีทั้งสอง(ดังรูปที่17.3.5) สมมุติด้วยว่าสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้วนี้มีมุมตรงกลางเป็น $\Delta\theta_k$ และมีรัศมีความหนาเป็น Δr_k รัศมีด้านในคือ $r_k^* - \frac{1}{2}\Delta r_k$ และรัศมีด้านนอกคือ $r_k^* + \frac{1}{2}\Delta r_k$ ทำให้ได้พื้นที่ ΔA_k ของสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงขั้วเป็นผลต่างระหว่างพื้นที่ของสองส่วน จะได้ว่า

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\left(r_k^* + \frac{1}{2}\Delta r_k\right)^2 \Delta\theta_k - \frac{1}{2}\left(r_k^* - \frac{1}{2}\Delta r_k\right)^2 \Delta\theta_k$$

ทำให้เป็นรูปอย่างง่ายได้

$$\Delta A_k = r_k^* \Delta r_k \Delta\theta_k$$

แทนค่า จะได้

$$\iint_R f(r,\theta)\,dA = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(r_k^*,\theta_k^*) r_k^* \Delta r_k \Delta\theta_k$$

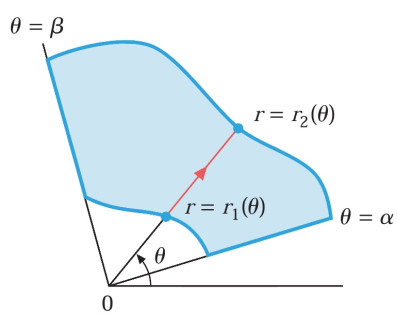
ซึ่งเป็นการอธิบายสูตรการหาปริพันธ์เชิงขั้วซ้อน

ในการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 2.3.1 จะเริ่มด้วยการเขียนภาพร่างบริเวณ R จากภาพเขียนภาพร่างจะสามารถหาขอบเขตของสูตรการหาปริพันธ์

$$\iint_R f(r,\theta)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

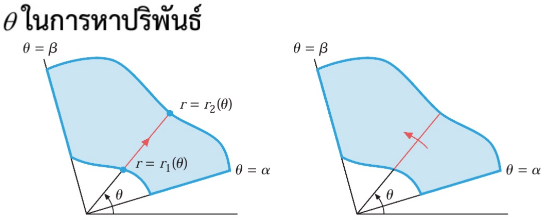
ซึ่งจะหาได้ดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> เนื่องจาก θ ถูกกำหนดในมีค่าคงที่ในปริพันธ์แรก ลากเส้นรัศมีจากจุดกำเนิดผ่านบริเวณ R ที่มุมคงที่ θ (ดูรูปที่17.3.6) เส้นตรงนี้จะตัดบริเวณ R ไม่เกินสองจุด จุดตัดด้านในสุดอยู่ที่โค้ง $r = r_1(\theta)$ และจุดตัดด้านนอกสุดอยู่บนโค้ง $r = r_2(\theta)$ จุดตัดเหล่านี้ทำให้ขอบเขตของ r ในการหาปริพันธ์



▲ **Figure 14.3.8**

<u>ขั้นที่ 2</u> หมุนรังสีที่อยู่ตามแนวแกน x ในทิศทางบวก ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิการอบจุดกำเนิด มุมที่เล็กที่สุดที่รังสีตัดบริเวณ R คือ $\theta = \alpha$ และมุมที่โตที่สุดที่รังสีตัดบริเวณ R คือ $\theta = \beta$ ทำให้ได้ขอบเขตของ θ ในการหาปริพันธ์



(a) (b)

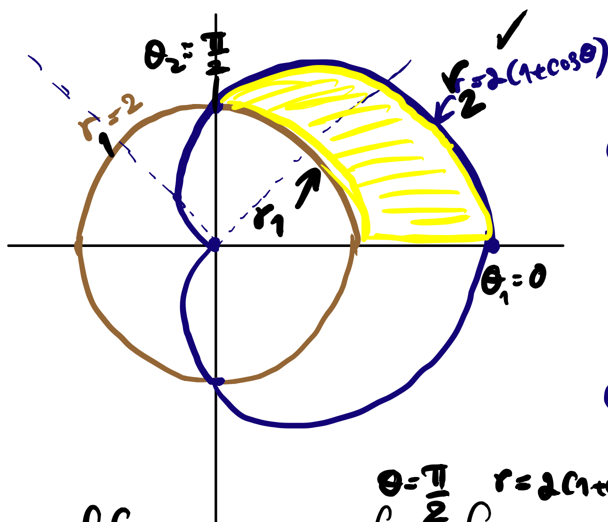
ตัวอย่าง 2.3.1 จงหา

$$\iint_R \sin\theta \, dA$$

โดยที่ R เป็นบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งที่ด้านนอกของวงกลม $r = 2$ และอยู่ด้านในของคาร์ดิออยด์

$$r = 2(1+\cos\theta)$$

วิธีทำ



$\theta = 0 \Rightarrow r = 2(1+\cos 0)$
$= 2(1+1) = 4$

$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r = 2(1+0.7)$
$= 3.4$

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 2(1+0) = 2$

$\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow r = 2(1-0.7)$
$= 2(0.3) \approx 0.6$

$\theta = \pi \Rightarrow r = 2(1+(-1))$
$= 2(0) = 0$

ดังนั้น
$$\iint_R \sin\theta \, dA = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=2}^{r=2(1+\cos\theta)} (\sin\theta) \, r \, dr \, d\theta$$

<u>ตัวอย่าง 2.3.2</u> ในระบบพิกัดทรงกระบอกสมการ $r^2 + z^2 = a^2$ มีกราฟเป็นทรงกลมรัศมี a จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด จงใช้ปริพันธ์สองชั้นเชิงขั้วหาปริมาตรทรงกลมนี้

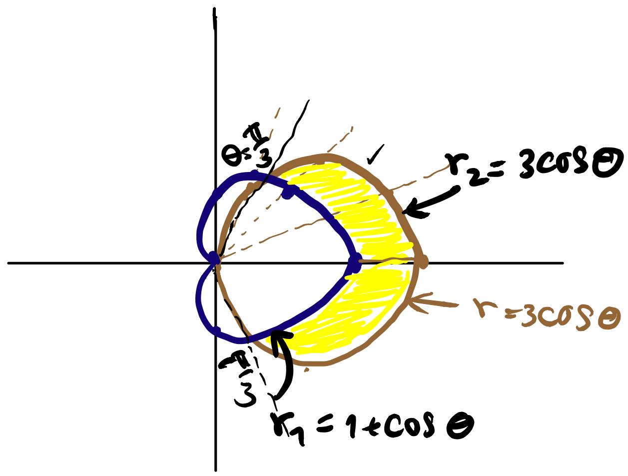
(You try it!)

การหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นเชิงขั้ว

$$\text{area of } R = \iint_R 1\, dA = \iint_R dA$$

ตัวอย่าง 2.3.3 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่อยู่ภายในวงกลม $r = 3\cos\theta$ และอยู่นอก $r = 1+\cos\theta$ Cardioid

วิธีทำ



• Check สมมาตร

สมมาตรกับแกนเชิงขั้ว

$0 \le \theta \le \pi$

สมมาตรกับ $\theta = \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

① วาดกราฟ ✓

② หาจุดตัด

$$3\cos\theta = 1+\cos\theta$$

$$\Rightarrow 2\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$$

③ หาพื้นที่ R

$$R = \iint_R 1\, dA = \int_{\theta=-\frac{\pi}{3}}^{\theta=\frac{\pi}{3}} \int_{r=1+\cos\theta}^{r=3\cos\theta} r\, dr\, d\theta$$

$$\left[= 2\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}} \int_{r=1+\cos\theta}^{r=3\cos\theta} r\, dr\, d\theta \right]$$

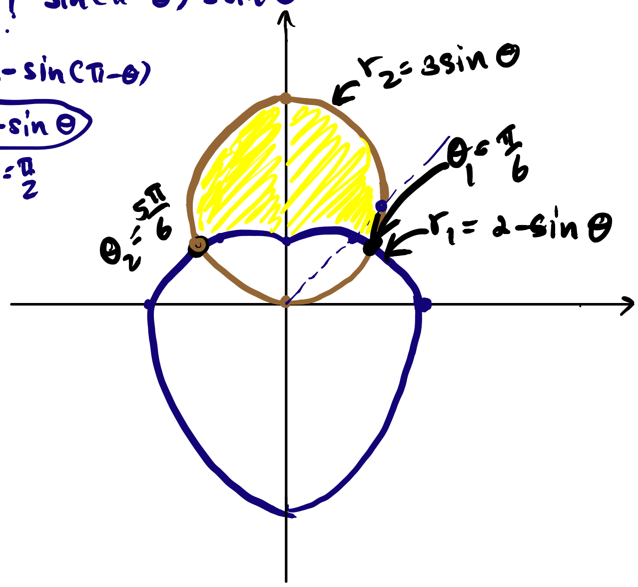
ตัวอย่าง 2.3.4 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่อยู่ภายในวงกลม $r = 3\sin\theta$ และอยู่นอก $r = 2 - \sin\theta$

Fact! $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$

$r = 2 - \sin(\pi - \theta)$

$\boxed{r = 2 - \sin\theta}$

sym $\theta = \frac{\pi}{2}$



$\theta = 0 \Rightarrow r = 2 - \sin 0 = 2$

$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r = 2 - 0.7 = 1.3$

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 2 - 1 = 1$

$\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow r = 2 - (0.7) = 1.3$

$\theta = \pi \Rightarrow r = 2$

$\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow r = 2 - (-1) = 3$

① วาดภาพ ✓

② หาจุดตัด $\quad 3\sin\theta = 2 - \sin\theta$

$$\Rightarrow 4\sin\theta = 2 \Rightarrow \sin\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \boxed{\frac{5\pi}{6}}$$

③ $$R = \iint_R 1\,dA = \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{5\pi}{6}} \int_{r=2-\sin\theta}^{r=3\sin\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$\left[= 2\int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=2-\sin\theta}^{r=3\sin\theta} r\,dr\,d\theta \right]$$

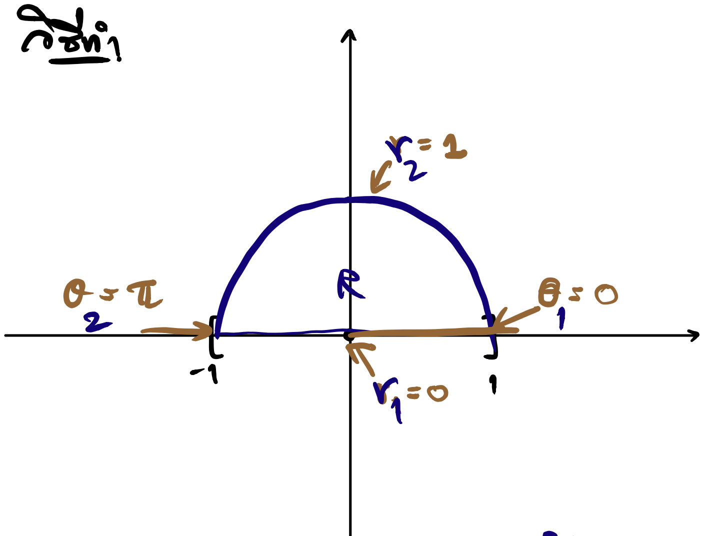
การเปลี่ยนปริพันธ์สองชั้นจากพิกัดฉากเป็นพิกัดเชิงขั้ว

บางครั้งปริพันธ์สองชั้นในพิกัดฉากจะยากต่อการคำนวณค่า แต่จะง่ายกว่ามากถ้าเปลี่ยนเป็นปริพันธ์สองชั้นเชิงขั้วที่สมมูลกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อตัวถูกหาปริพันธ์หรือขอบของบริเวณ R อยู่ในรูป x^2+y^2 หรือ $\sqrt{x^2+y^2}$ เพราะสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูป r^2 หรือ r ในพิกัดเชิงขั้ว

ตัวอย่าง 2.3.7 จงใช้ปริพันธ์สองชั้นเชิงขั้วหาค่าของ

$$\int_{-1}^{1}\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dy\,dx$$

วิธีทำ



$y = \sqrt{1-x^2}$

$y^2 = 1-x^2$

$x^2+y^2 = 1$

พิจารณา ฟังก์ชัน $(x^2+y^2)^{3/2}$ สามารถเขียนในพิกัดเชิงขั้วได้เป็น

$$f(r,\theta) = (r^2)^{3/2} = r^3$$

ดังนั้น
$$\int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dy\,dx = \iint_R r^3\,dA$$

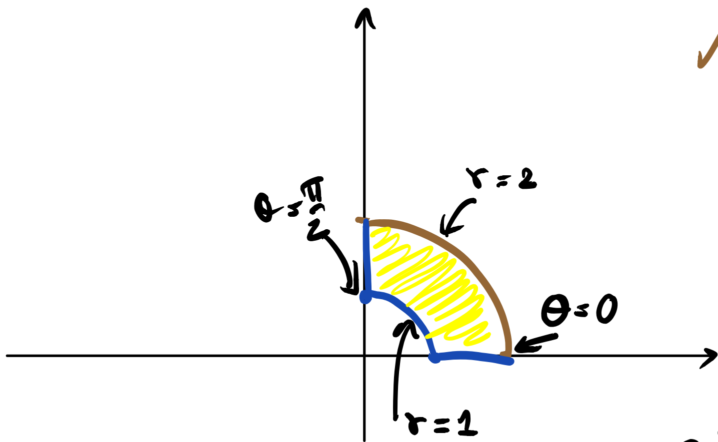
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{r=0}^{r=1} r^3\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$\left[= 2\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=1} r^4\,dr\,d\theta \right]$$

ตัวอย่าง 2.3.9 จงใช้ปริพันธ์สองชั้นเชิงขั้วหาค่า

$$\iint_R (3x+y)\,dA$$

เมื่อ R เป็นบริเวณในจตุภาคที่ 1 ที่อยู่ในวงกลม $x^2+y^2=4$ และนอกวงกลม $x^2+y^2=1$



พิจารณา

$$3x+y = 3r\cos\theta + r\sin\theta$$
$$= r(3\cos\theta+\sin\theta)$$

ดังนั้น

$$\iint_R (3x+y)\,dA = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{r=1}^{r=2} r(3\cos\theta+\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

แบบฝึกหัด!

✔ QUICK CHECK EXERCISES 14.3

(See page 1025 for answers.)

1. The polar region inside the circle $r = 2\sin\theta$ and outside the circle $r = 1$ is a simple polar region given by the inequalities
$$\_\_\_\_\_ \le r \le \_\_\_\_\_, \qquad \_\_\_\_\_ \le \theta \le \_\_\_\_\_$$

2. Let R be the region in the first quadrant enclosed between the circles $x^2 + y^2 = 9$ and $x^2 + y^2 = 100$. Supply the missing limits of integration.
$$\iint_R f(r,\theta)\,dA = \int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} f(r,\theta)r\,dr\,d\theta$$

3. Let V be the volume of the solid bounded above by the hemisphere $z = \sqrt{1-r^2}$ and bounded below by the disk enclosed within the circle $r = \sin\theta$. Expressed as a double integral in polar coordinates, $V =$ _____.

4. Express the iterated integral as a double integral in polar coordinates.
$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)dy\,dx = \_\_\_\_\_$$

EXERCISE SET 14.3

1–6 Evaluate the iterated integral. ■

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta} r\cos\theta\,dr\,d\theta$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\sin\theta} r^2\,dr\,d\theta$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\int_0^{\cos 3\theta} r\,dr\,d\theta$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{1-\sin\theta} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} r^3\,dr\,d\theta$

7–10 Use a double integral in polar coordinates to find the area of the region described. ■

7. The region enclosed by the cardioid $r = 1 - \cos\theta$.
8. The region enclosed by the rose $r = \sin 2\theta$.
9. The region in the first quadrant bounded by $r = 1$ and $r = \sin 2\theta$, with $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$.
10. The region inside the circle $x^2 + y^2 = 4$ and to the right of the line $x = 1$.

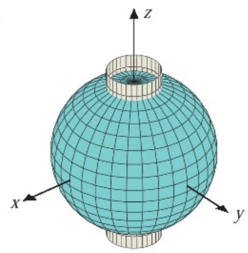
FOCUS ON CONCEPTS

11–12 Let R be the region described. Sketch the region R and fill in the missing limits of integration.
$$\iint_R f(r,\theta)\,dA = \int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} f(r,\theta)r\,dr\,d\theta \quad ■$$

11. The region inside the circle $r = 4\sin\theta$ and outside the circle $r = 2$.
12. The region inside the circle $r = 1$ and outside the cardioid $r = 1 + \cos\theta$.

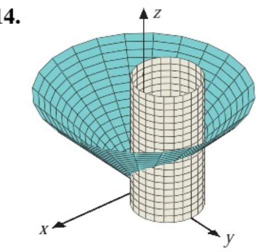
13–16 Express the volume of the solid described as a double integral in polar coordinates. ■

13.



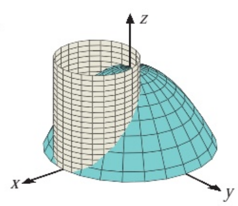
Inside of $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
Outside of $x^2 + y^2 = 1$

14.



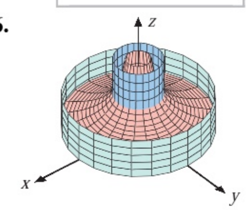
Below $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
Inside of $x^2 + y^2 = 2y$
Above $z = 0$

15.



Below $z = 1 - x^2 - y^2$
Inside of $x^2 + y^2 - x = 0$
Above $z = 0$

16.



Below $z = (x^2 + y^2)^{-1/2}$
Outside of $x^2 + y^2 = 1$
Inside of $x^2 + y^2 = 9$
Above $z = 0$

17–20 Find the volume of the solid described in the indicated exercise. ■

17. Exercise 13
18. Exercise 14
19. Exercise 15
20. Exercise 16
21. Find the volume of the solid in the first octant bounded above by the surface $z = r\sin\theta$, below by the xy-plane, and laterally by the plane $x = 0$ and the surface $r = 3\sin\theta$.
22. Find the volume of the solid inside the surface $r^2 + z^2 = 4$ and outside the surface $r = 2\cos\theta$.

23–26 Use polar coordinates to evaluate the double integral. ■

23. $\iint_R \sin(x^2 + y^2)\, dA$, where R is the region enclosed by the circle $x^2 + y^2 = 9$.

24. $\iint_R \sqrt{9 - x^2 - y^2}\, dA$, where R is the region in the first quadrant within the circle $x^2 + y^2 = 9$.

25. $\iint_R \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, dA$, where R is the sector in the first quadrant bounded by $y = 0$, $y = x$, and $x^2 + y^2 = 4$.

26. $\iint_R 2y\, dA$, where R is the region in the first quadrant bounded above by the circle $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ and below by the line $y = x$.

27–34 Evaluate the iterated integral by converting to polar coordinates. ■

27. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$

28. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$

29. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

30. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \cos(x^2 + y^2)\, dx\, dy$

31. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy\, dx}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (a > 0)$

32. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$

33. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\, dx\, dy$

34. $\int_{-4}^0 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} 3x\, dy\, dx$

35–38 True–False Determine whether the statement is true or false. Explain your answer. ■

35. The disk of radius 2 that is centered at the origin is a polar rectangle.

36. If f is continuous and nonnegative on a simple polar region R, then the volume of the solid enclosed between R and the surface $z = f(r, \theta)$ is expressed as

$$\iint_R f(r, \theta) r\, dA$$

37. If R is the region in the first quadrant between the circles $r = 1$ and $r = 2$, and if f is continuous on R, then

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 f(r, \theta)\, dr\, d\theta$$

38. The area enclosed by the circle $r = \sin\theta$ is given by

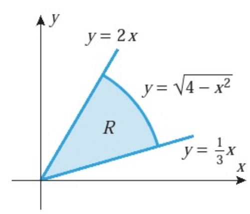
$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sin\theta} r\, dr\, d\theta$$

39. Use a double integral in polar coordinates to find the volume of a cylinder of radius a and height h.

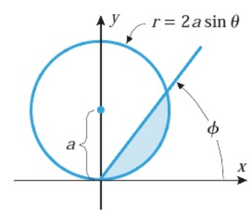
40. Suppose that a geyser, centered at the origin of a polar coordinate system, sprays water in a circular pattern in such a way that the depth D of water that reaches a point at a distance of r feet from the origin in 1 hour is $D = ke^{-r}$. Find the total volume of water that the geyser sprays inside a circle of radius R centered at the origin.

41. Evaluate $\iint_R x^2\, dA$ over the region R shown in the accompanying figure.

42. Show that the shaded area in the accompanying figure is $a^2\phi - \frac{1}{2}a^2 \sin 2\phi$.



▲ **Figure Ex-41**



▲ **Figure Ex-42**

43. (a) Use a double integral in polar coordinates to find the volume of the oblate spheroid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (0 < c < a)$$

(b) Use the result in part (a) and the World Geodetic System of 1984 (WGS-84) discussed in Exercise 54 of Section 11.7 to find the volume of the Earth in cubic meters.

44. Use polar coordinates to find the volume of the solid that is above the xy-plane, inside the cylinder $x^2 + y^2 - ay = 0$, and inside the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

45. Find the area of the region enclosed by the lemniscate $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.

46. Find the area in the first quadrant that is inside the circle $r = 4\sin\theta$ and outside the lemniscate $r^2 = 8\cos 2\theta$.

✔ QUICK CHECK ANSWERS 14.3

1. $1 \le r \le 2\sin\theta,\ \pi/6 \le \theta \le 5\pi/6$ **2.** $\int_0^{\pi/2} \int_3^{10} f(r, \theta) r\, dr\, d\theta$ **3.** $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin\theta} r\sqrt{1 - r^2}\, dr\, d\theta$ **4.** $\int_0^{\pi/4} \int_1^{\sec\theta} \frac{1}{r}\, dr\, d\theta$