2.2 ปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณที่ไม่เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก

(Double Integrals over Nonrectangular)

ในหัวข้อนี้จะแสดงถึงวิธีการหาค่าปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณอื่นที่ไม่เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก ปริพันธ์ซ้อนที่เส้นขอบไม่เป็นค่าคงตัว การหาค่าปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณที่ไม่เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากจะสามารถจัดรูปแบบเป็นการหาปริพันธ์ซ้อนของรูปแบบต่อไปนี้

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy$$

จะเริ่มด้วยตัวอย่างซึ่งแสดงการหาค่าโดยการใช้ปริพันธ์ซ้อนเหล่านี้

<u>ตัวอย่าง 2.2.1</u> จงหาค่าของ $\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=x^2}^{y=x} y^2 x\,dy\,dx$

วิธีทำ

$$\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=x^2}^{y=x} y^2 x\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=2} \left[\int_{y=x^2}^{y=x} y^2 x\,dy\right] dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left[\frac{y^3 x}{3}\right]_{y=x^2}^{y=x} dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left[\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3}\right] dx$$

$$= \left.\frac{x^5}{15} - \frac{x^8}{24}\right]_{x=0}^{x=2}$$

$$= \left(\frac{2^5}{15} - \frac{2^8}{24}\right) - \left(\frac{0^5}{15} - \frac{0^8}{24}\right) = \frac{32}{15} - \frac{256}{24}$$

$$= -\frac{128}{15}$$

ตัวอย่าง 2.2.3: $\displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi/4}\int_{y=\sin x}^{y=\cos x} y\sin 2x\,dy\,dx$ [แบบโจทย์]

วิธีทำ $$\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}\int_{y=\sin x}^{y=\cos x} y\sin 2x\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}\left[\int_{y=\sin x}^{y\cos x} y\sin 2x\,dy\right]dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=\pi/4}\left[\frac{y^2}{2}\sin 2x\right]_{y=\sin x}^{y=\cos x} dx$$

Fact! $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$$= \int_{x=0}^{x=\pi/4}\left[\frac{1}{2}\cos^2 x\sin 2x - \frac{1}{2}\sin^2 x\sin 2x\right]dx$$

พิจารณา $$\int \frac{1}{2}\cos^2 x\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos^2 x\cdot 2\sin x\cos x\,dx$$

$$= \int \cos^3 x\underbrace{\sin x\,dx}_{-du}$$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$du = -\sin x\,dx$

$$= -\int u^3\,du$$

$$= -\frac{u^4}{4} = -\frac{\cos^4 x}{4}$$

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos^2 x\sin 2x\,dx = \left[-\frac{\cos^4 x}{4}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\cos^4\frac{\pi}{4}}{4} + \frac{\cos^4 0}{4}$$

พิจารณา $$\int \frac{1}{2}\sin^2 x\sin 2x\,dx = \int \sin^3 x\cos x\,dx$$

$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\,dx$

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=\pi/4} \frac{1}{2}\sin^2 x\sin 2x\,dx = \left.\frac{\sin^4 x}{4}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = \ldots \text{ต่อเอง}$$

ตัวอย่าง 2.2.5 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^1\int_0^y e^y\,dx\,dy$ [แก้โจทย์]

วิธีทำ

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=y} e^y\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=1}\left[\int_{x=0}^{x=y} e^y\,dx\right]dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\left[xe^y\right]_{x=0}^{x=y}dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\left[y\cdot e^y - 0\cdot e^y\right]dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} ye^y\,dy$$

$u=y$; $dv=e^y dy$

$\Rightarrow du=dy$; $v=e^y$

พิจารณา $\displaystyle\int ye^y\,dy = ye^y - \int e^y\,dy = ye^y - e^y$

$$\Rightarrow \int_{y=0}^{y=2}\int_{x=0}^{x=y} e^y\,dx\,dy = \left[ye^y - e^y\right]_{y=0}^{y=2}$$

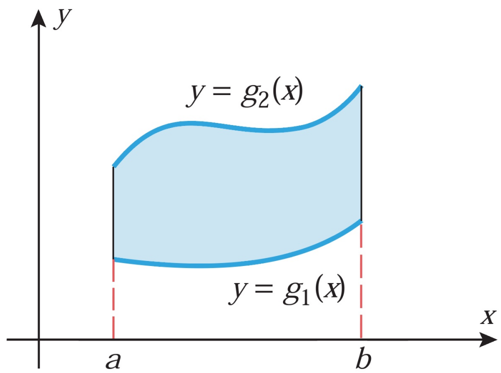
$$= 2e^2 - e^2 - 0\cdot e^0 + e^0$$

$$= e^2 + e^0 = e^2+1 \quad \blacksquare$$

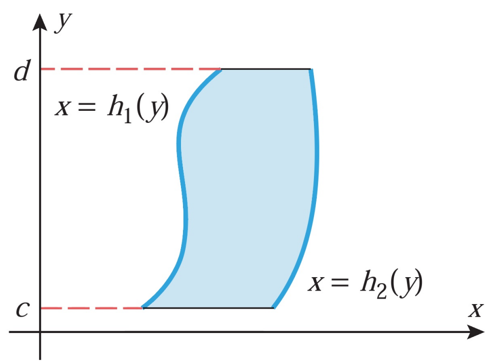
ในที่นี้จะพิจารณาการหาปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณที่มีลักษณะพื้นฐานสองแบบ ซึ่งจะเรียกว่า แบบที่หนึ่ง และ แบบที่สอง ที่กำหนดดังนี้

นิยาม 2.2.1 แบบที่หนึ่ง บริเวณที่มีเส้นขอบด้านซ้ายและด้านขวาเป็นเส้นแนวตั้ง $x=a$ และ $x=b$ และมีเส้นขอบด้านล่างและด้านบนเป็นเส้นโค้งต่อเนื่อง $y=g_1(x)$ และ $y=g_2(x)$ โดยที่ $g_1(x)\le g_2(x)$ สำหรับ $a\le x\le b$ (ดูรูปที่17.2.1a)

แบบที่สอง บริเวณที่มีเส้นขอบด้านล่างและด้านบนเป็นเส้นแนวนอน $y=c$ และ $y=d$ และมีเส้นขอบด้านซ้ายและด้านขวาเป็นเส้นโค้งต่อเนื่อง $x=h_1(y)$ และ $x=h_2(y)$ โดยที่ $h_1(y)\le h_2(y)$ สำหรับ $c\le y\le d$



A type I region



A type II region

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะเป็นแนวทางให้สามารถหาปริพันธ์สองชั้น บนบริเวณแบบที่หนึ่งและแบบที่สองโดยการหาปริพันธ์ซ้อน

ทฤษฎีบท 2.2.1

(a) ถ้า R เป็นบริเวณแบบที่หนึ่งซึ่ง $f(x,y)$ ต่อเนื่อง แล้ว

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

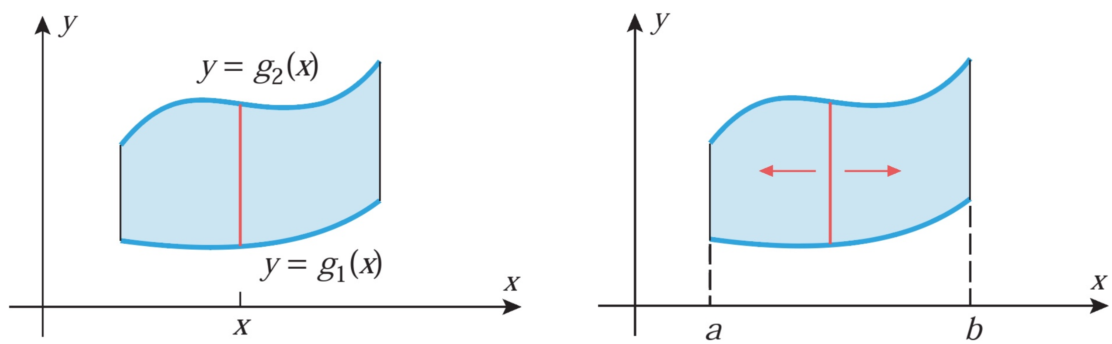
(b) ถ้า R เป็นบริเวณแบบที่สองซึ่ง $f(x,y)$ ต่อเนื่อง แล้ว

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

แบบที่ 1:

<u>ขั้นที่ 1</u> เนื่องจากให้ x เป็นตัวคงที่สำหรับการหาปริพันธ์ที่หนึ่ง ลากเส้นในแนวตั้งผ่านบริเวณ R ที่จุดคงที่ x (ดูรูปที่17.2.3) เส้นตรงนี้จะตัดบริเวณ R สองครั้ง ด้านล่างที่จุดตัดโค้ง $y = g_1(x)$ ด้านบนที่จุดตัดโค้ง $y = g_2(x)$ จุดตัดทั้งสองนี้ทำให้ได้ขอบเขตล่างและขอบเขตบนสำหรับ y ในการหาปริพันธ์สูตรที่หนึ่ง

<u>ขั้นที่ 2</u> เคลื่อนที่เส้นที่ลากในขั้นที่หนึ่งไปทางซ้ายและไปทางขวา (ดูรูปที่ 17.2.3) ตำแหน่งซ้ายสุดที่เส้นตรงตัดบริเวณ R คือ $x = a$ และตำแหน่งขวาสุดที่เส้นตรงตัดบริเวณ R คือ $x = b$ ตำแหน่งเหล่านี้จะทำให้ได้ขอบเขตสำหรับ x ในการหาปริพันธ์ตามสูตรที่หนึ่ง

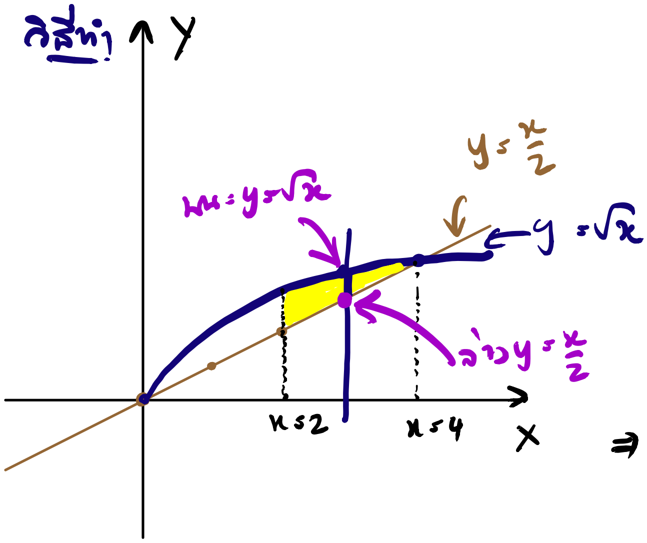


<u>ตัวอย่าง 2.2.6</u> จงหาค่าของ

$$\iint_R xy\,dA$$

บนบริเวณ R ซึ่งล้อมรอบด้วย $y = \frac{1}{2}x, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 2$ และ $x = 4$

วิธีทำ



หาจุดตัด:

$$y = y$$

$$\frac{1}{2}x = \sqrt{x}$$

$$\frac{x^2}{4} = x \Rightarrow \frac{x^2}{4} - x = 0$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{x}{4} - 1\right) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 4$$

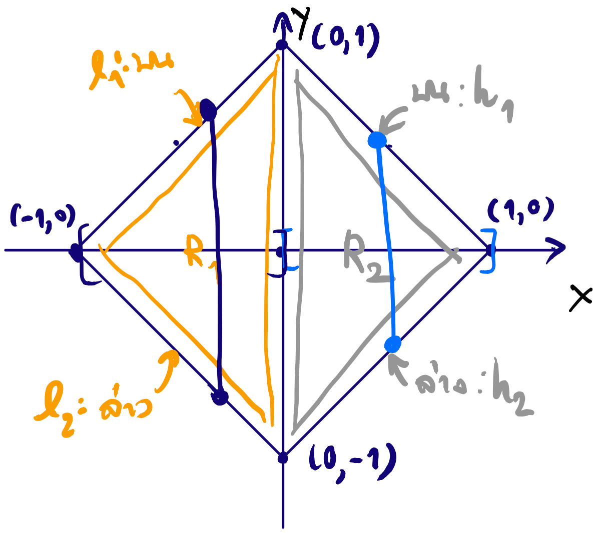
$$\Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dA = \int_{x=2}^{x=4} \int_{y=\frac{x}{2}}^{y=\sqrt{x}} xy\,dy\,dx$$

∎

ตัวอย่าง 2.2.7 จงหาค่าของ

$$\iint_R xy\,dA$$

บนบริเวณ R ซึ่งล้อมรอบด้วยสี่เหลี่ยมจัตุรัส $|x|+|y|=1$



พิจารณา l_2:

$(y-0) = (-1)(x-(-1)) \Rightarrow y = -x-1$

l_1:

$(y-0) = (1)(x-(-1)) \Rightarrow y = x+1$

พิจารณา h_1:

$(y-0) = (-1)(x-1) \Rightarrow y = -x+1$

h_2

$(y-0) = (1)(x-1) \Rightarrow y = x-1$

$$\Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$

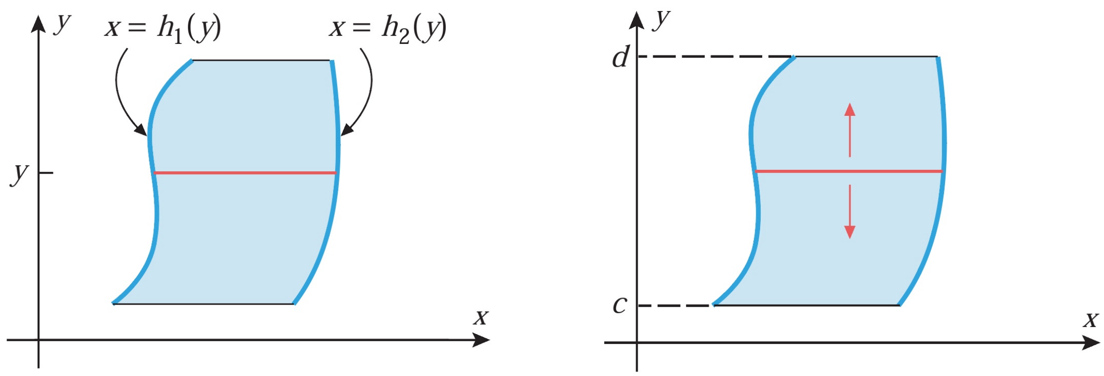
$$= \int_{x=-1}^{x=0}\int_{y=-x-1}^{y=x+1} xy\,dy\,dx + \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x-1}^{y=-x+1} xy\,dy\,dx$$

แบบที่ 2 :

ถ้า R เป็นบริเวณแบบที่สองแล้ว ขอบเขตสำหรับการหาปริพันธ์ในสูตรที่สองได้ ดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> เนื่องจากให้ y เป็นตัวคงที่สำหรับการหาปริพันธ์ที่สอง ลากเส้นในแนวนอนผ่านบริเวณ R ที่จุดคงที่ y (ดูรูปที่ 17.2.5) เส้นตรงนี้จะตัดบริเวณ R สองครั้ง ด้านซ้ายสุดที่จุดตัดโค้ง $x = h_1(y)$ ด้านขวาสุดที่จุดตัดโค้ง $x = h_2(y)$ จุดตัดทั้งสองนี้ทำให้ได้ขอบเขตล่างและขอบเขตบนสำหรับ x ในการหาปริพันธ์สูตรที่สอง

<u>ขั้นที่ 2</u> เคลื่อนที่เส้นที่ลากในขั้นที่หนึ่งไปด้านล่างและไปด้านบน (ดูรูปที่ 17.2.5) ตำแหน่งล่างสุดที่เส้นตรงตัดบริเวณ R คือ $y = c$ และตำแหน่งบนสุดที่เส้นตรงตัดบริเวณ R คือ $y = d$ ตำแหน่งเหล่านี้จะทำให้ได้ขอบเขตสำหรับ y ในการหาปริพันธ์ตามสูตรที่สอง

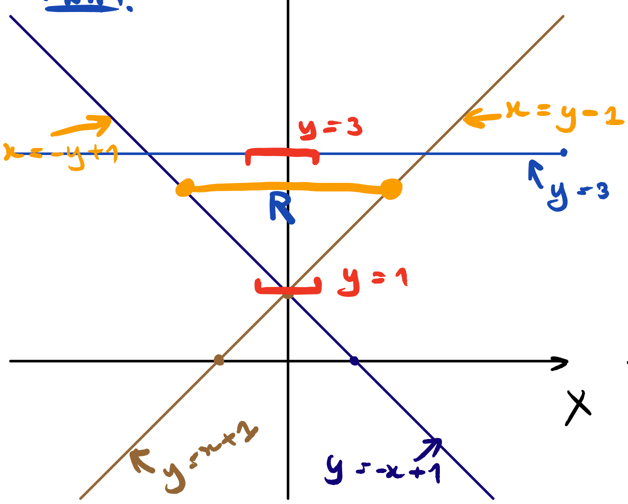


ตัวอย่าง 2.2.8 จงหาค่าของ

$$\iint_R \left(2x - y^2\right) dA$$

บนบริเวณสามเหลี่ยม R ที่ล้อมรอบด้วย $y = -x + 1$, $y = x + 1$ และ $y = 3$

วิธีทำ.



Type II :

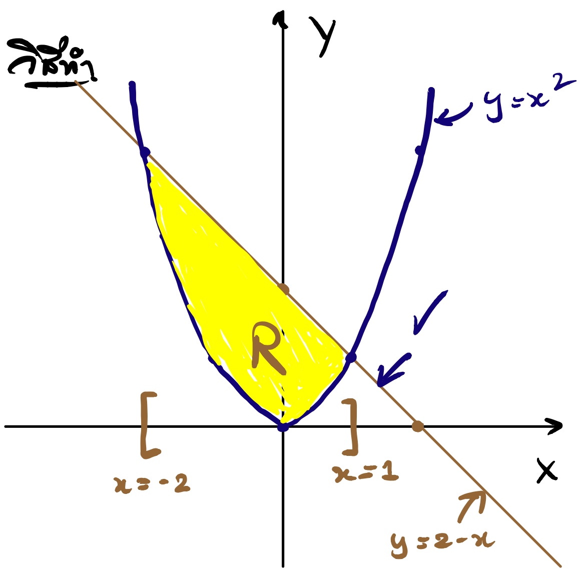
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{y=1}^{y=3} \int_{x=-y+1}^{x=y-1} (2x - y^2)\,dx\,dy$$

ตัวอย่าง 2.2.10 จงหาค่าของ

$$\iint_R (x+y)\,dA$$

บนบริเวณ R ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 2 - x$ และ $y = x^2$

วิธีทำ



R เป็นบริเวณ Type I

หาจุดตัด!

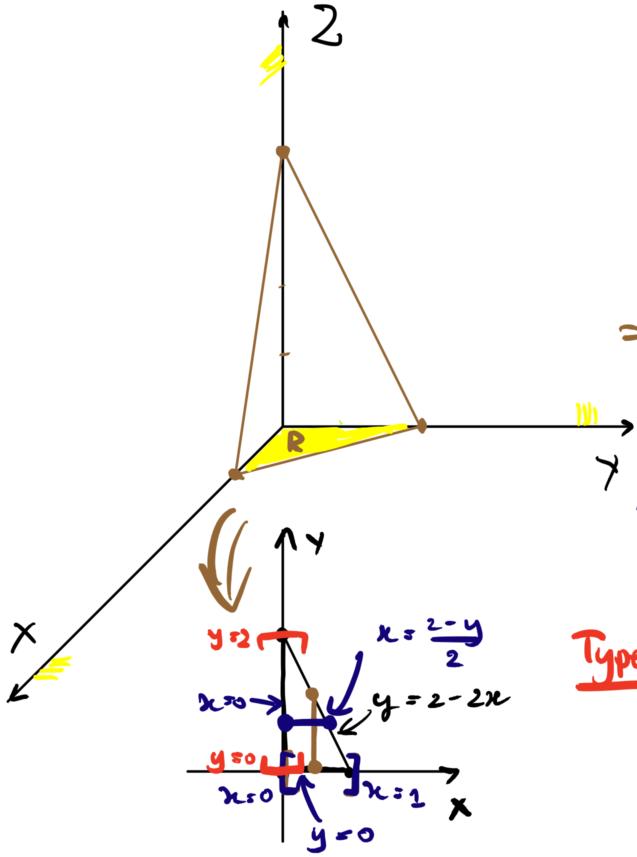
$y = y \Rightarrow x^2 = 2 - x$

$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2, 1$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{x=-2}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=2-x} (x+y)\,dy\,dx$$

ตัวอย่าง 2.2.15 จงใช้ปริพันธ์สองชั้นหาปริมาตรของทรงสี่หน้าซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบพิกัดและระนาบ

$$z = 4 - 4x - 2y$$



$z = 0 \Rightarrow 0 = 4 - 4x - 2y$

$\Rightarrow y = 2 - 2x$

$y = 0 \Rightarrow z = 4 - 4x$

$x = 0 \Rightarrow z = 4 - 2y$

$\Rightarrow f(x,y) = 4 - 4x - 2y$

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA$$

Type I:

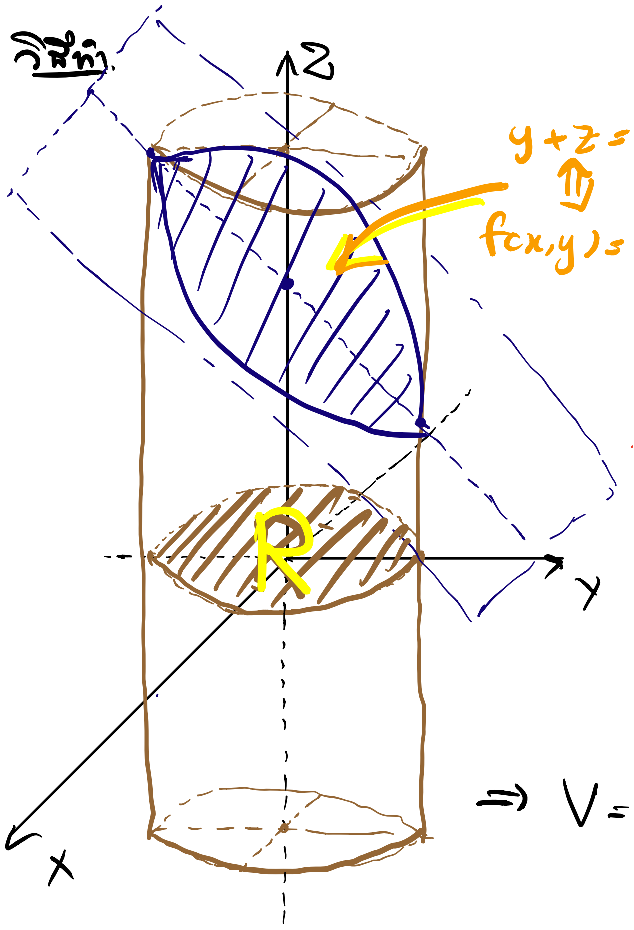
$$= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=2-2x} (4 - 4x - 2y)\,dy\,dx$$

Type II:

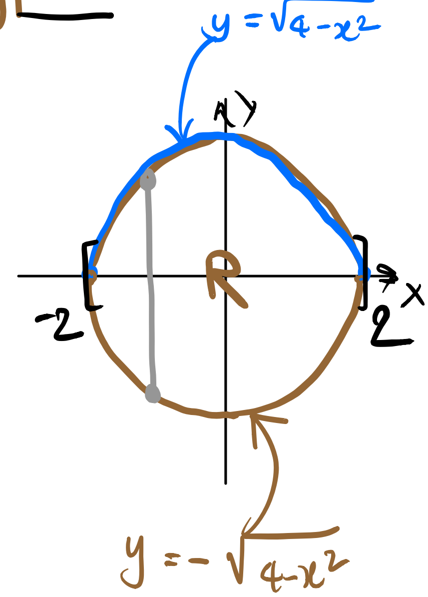
$$V = \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=0}^{x=\frac{2-y}{2}} (4 - 4x - 2y)\,dx\,dy$$

ตัวอย่าง 2.2.16 จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่ล้อมรอบด้วยทรงกระบอก $x^2+y^2=4$ และระนาบ $y+z=4$ และ $z=0$

วิธีทำ

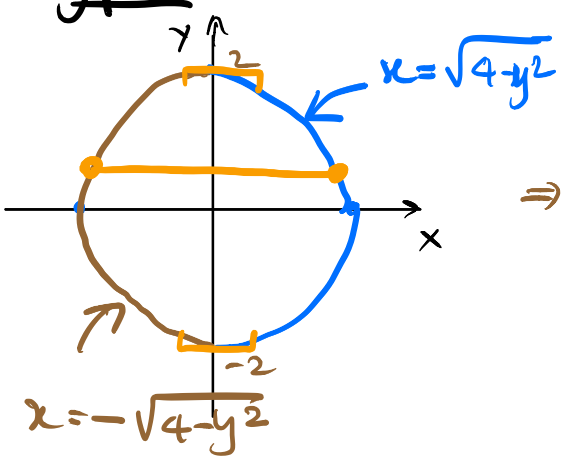


Type I:



$$\Rightarrow V = \iint_R f(x,y)\,dA = \int_{x=-2}^{x=2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} (4-y)\,dy\,dx$$

Type II:

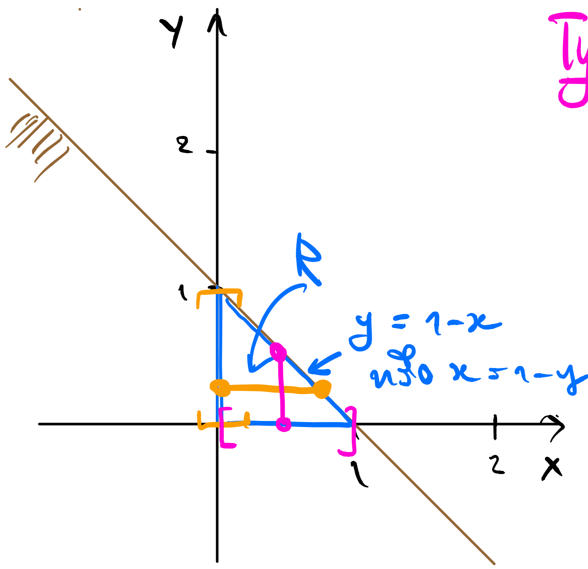


$$\Rightarrow V = \iint_R f(x,y)\,dA$$

$$= \int_{y=-2}^{y=2}\int_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{x=\sqrt{4-y^2}} (4-y)\,dx\,dy$$

ตัวอย่าง 2.2.17 จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิว $z = 4 - x^2 - y^2$ ระนาบพิกัดและระนาบ $x + y = 1$ โดยที่ $x + y \le 1$

วิธีทำ วาดบริเวณ R ได้ดังนี้



Type I:

$$V = \iint_R f(x,y)\, dA$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{y=1-x} (4 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

Type II:

$$V = \iint_R f(x,y)\, dA$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=1-y} (4 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$$

การสลับอันดับของการหาปริพันธ์

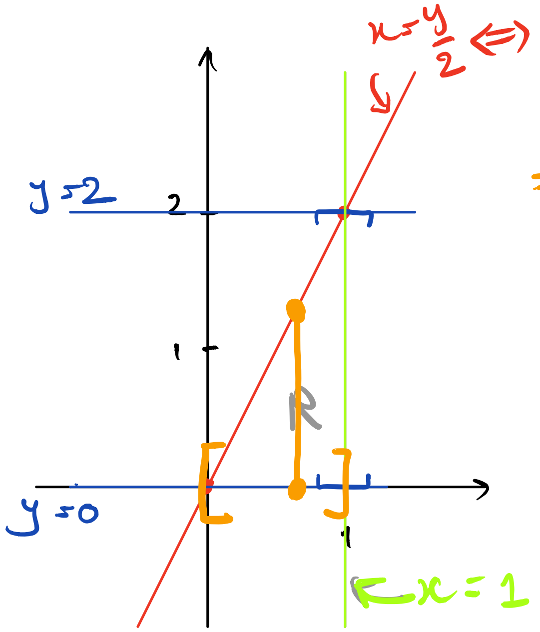
ในบางครั้งการหาค่าปริพันธ์ซ้อนเพื่อความสะดวก อาจจะต้องสลับอันดับของปริพันธ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.2.11 จงหาค่า

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\,dx\,dy$$

เนื่องจาก $\int e^{x^2}dx$

ไม่สามารถหาค่าได้ในรูปปกติ เราจึงต้องทำการสลับอันดับการหาปริพันธ์ย่อย โดยพิจารณาบริเวณ R ดังนี้



⇒ สลับจาก Type II ⇒ Type I

และหาค่าได้ดังนี้

$$\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=\frac{y}{2}}^{x=1} e^{x^2}\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2x} e^{x^2}\,dy\,dx$$

$= \cdots$ ซึ่งคำนวณได้

<u>การหาพื้นที่โดยปริพันธ์สองชั้น</u> แม้ว่าปริพันธ์สองชั้นจะกำหนดขึ้นมาเพื่อหาปริมาตร แต่ก็สามารถใช้ในการหาพื้นที่ได้ด้วย สำหรับจุดประสงค์นี้จะต้องพิจารณาทรงตันของจุดที่อยู่ระหว่างระนาบ $z=1$ กับบริเวณ R ที่อยู่ในระนาบ xy (ดังรูปที่ 17.2.9) ปริมาตรของทรงตันนี้ คือ

$$V = \iint_R 1\,dA = \iint_R dA$$

อย่างไรก็ตาม เนื่องจาก

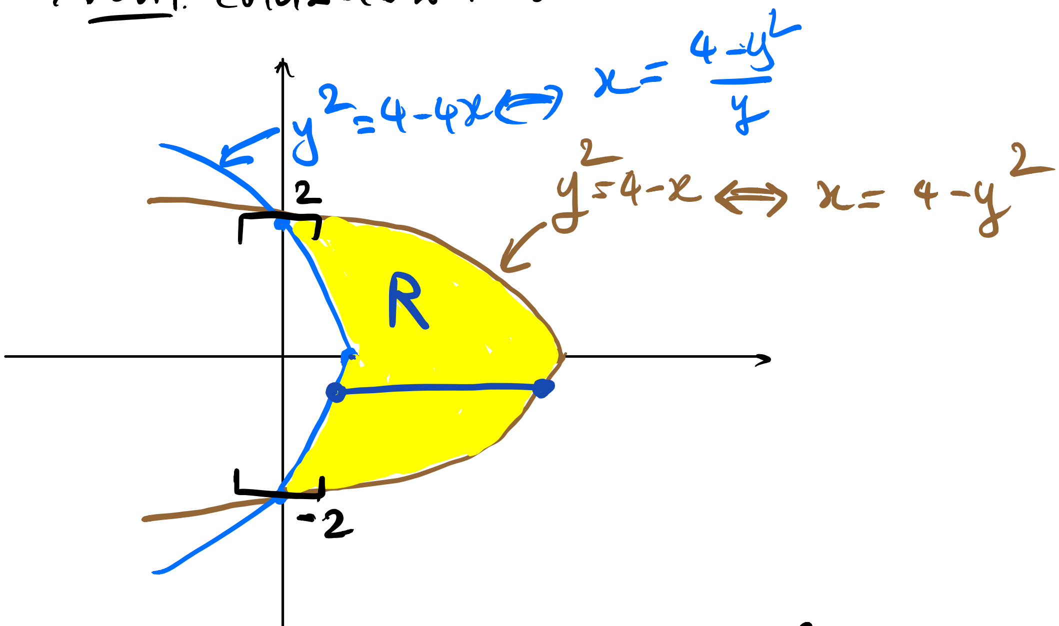
$$V = \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง} = \text{พื้นที่ของ } R \times 1 = \text{พื้นที่ของ } R$$

นั่นคือ

$$\boxed{\text{พื้นที่ของ } R = \iint_R dA}$$

<u>ตัวอย่าง 2.2.13</u> จงใช้ปริพันธ์สองชั้นหาพื้นที่บริเวณ R ที่ล้อมรอบด้วยพาราโบลา $y^2 = 4-x$ และ $y^2 = 4-4x$

<u>วิธีทำ</u>. วาดบริเวณ R ดังนี้



$$R = \iint_R 1\,dA = \int_{y=-2}^{y=2}\int_{x=\frac{4-y^2}{y}}^{x=4-y^2} 1\,dx\,dy$$

✔ QUICK CHECK EXERCISES 14.2 (See page 1018 for answers.)

1. Supply the missing integrand and limits of integration.

(a) $\displaystyle\int_1^5 \int_2^{y/2} 6x^2 y\, dx\, dy = \int_{\square}^{\square} \underline{\hspace{2cm}}\, dy$

(b) $\displaystyle\int_1^5 \int_2^{x/2} 6x^2 y\, dy\, dx = \int_{\square}^{\square} \underline{\hspace{2cm}}\, dx$

2. Let R be the triangular region in the xy-plane with vertices $(0, 0)$, $(3, 0)$, and $(0, 4)$. Supply the missing portions of the integrals.

(a) Treating R as a type I region,
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y) \underline{\hspace{2cm}}$$

(b) Treating R as a type II region,
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y) \underline{\hspace{2cm}}$$

3. Let R be the triangular region in the xy-plane with vertices $(0, 0)$, $(3, 3)$, and $(0, 4)$. Expressed as an iterated double integral, the area of R is $A(R) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. The line $y = 2 - x$ and the parabola $y = x^2$ intersect at the points $(-2, 4)$ and $(1, 1)$. If R is the region enclosed by $y = 2 - x$ and $y = x^2$, then
$$\iint_R (1 + 2y)\, dA = \underline{\hspace{2cm}}$$

EXERCISE SET 14.2 Graphing Utility C CAS

1–8 Evaluate the iterated integral. ■

1. $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2\, dy\, dx$

2. $\displaystyle\int_1^{3/2} \int_y^{3-y} y\, dx\, dy$

3. $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} y\, dx\, dy$

4. $\displaystyle\int_{1/4}^1 \int_{x^2}^{x} \sqrt{\frac{x}{y}}\, dy\, dx$

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^3} \sin\frac{y}{x}\, dy\, dx$

6. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-x^2}^{x^2} (x^2 - y)\, dy\, dx$

7. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x y\sqrt{x^2 - y^2}\, dy\, dx$

8. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{y^2} e^{x/y^2}\, dx\, dy$

FOCUS ON CONCEPTS

9. Let R be the region shown in the accompanying figure. Fill in the missing limits of integration.

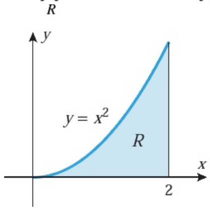
(a) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\, dy\, dx$

(b) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\, dx\, dy$

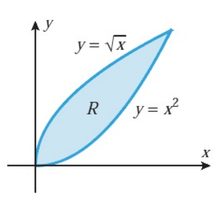
10. Let R be the region shown in the accompanying figure. Fill in the missing limits of integration.

(a) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\, dy\, dx$

(b) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\, dx\, dy$



▲ **Figure Ex-9**



▲ **Figure Ex-10**

11. Let R be the region shown in the accompanying figure. Fill in the missing limits of integration.

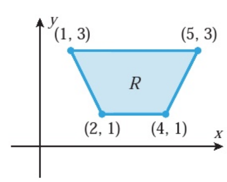
(a) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA = \int_1^2 \int_{\square}^{\square} f(x, y)\, dy\, dx + \int_2^4 \int_{\square}^{\square} f(x, y)\, dy\, dx + \int_4^5 \int_{\square}^{\square} f(x, y)\, dy\, dx$

(b) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\, dx\, dy$

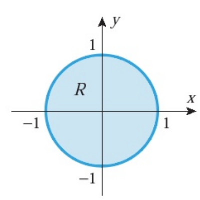
12. Let R be the region shown in the accompanying figure. Fill in the missing limits of integration.

(a) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\, dy\, dx$

(b) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\, dx\, dy$



▲ **Figure Ex-11**



▲ **Figure Ex-12**

13. Evaluate $\displaystyle\iint_R xy\, dA$, where R is the region in

(a) Exercise 9

(b) Exercise 11.

14. Evaluate $\iint_R (x+y)\,dA$, where R is the region in

(a) Exercise 10 (b) Exercise 12.

15–18 Evaluate the double integral in two ways using iterated integrals: (a) viewing R as a type I region, and (b) viewing R as a type II region. ■

15. $\iint_R x^2\,dA$; R is the region bounded by $y=16/x$, $y=x$, and $x=8$.

16. $\iint_R xy^2\,dA$; R is the region enclosed by $y=1$, $y=2$, $x=0$, and $y=x$.

17. $\iint_R (3x-2y)\,dA$; R is the region enclosed by the circle $x^2+y^2=1$.

18. $\iint_R y\,dA$; R is the region in the first quadrant enclosed between the circle $x^2+y^2=25$ and the line $x+y=5$.

19–24 Evaluate the double integral. ■

19. $\iint_R x(1+y^2)^{-1/2}\,dA$; R is the region in the first quadrant enclosed by $y=x^2$, $y=4$, and $x=0$.

20. $\iint_R x\cos y\,dA$; R is the triangular region bounded by the lines $y=x$, $y=0$, and $x=\pi$.

21. $\iint_R xy\,dA$; R is the region enclosed by $y=\sqrt{x}$, $y=6-x$, and $y=0$.

22. $\iint_R x\,dA$; R is the region enclosed by $y=\sin^{-1}x$, $x=1/\sqrt{2}$, and $y=0$.

23. $\iint_R (x-1)\,dA$; R is the region in the first quadrant enclosed between $y=x$ and $y=x^3$.

24. $\iint_R x^2\,dA$; R is the region in the first quadrant enclosed by $xy=1$, $y=x$, and $y=2x$.

25. Evaluate $\iint_R \sin(y^3)\,dA$, where R is the region bounded by $y=\sqrt{x}$, $y=2$, and $x=0$. [*Hint:* Choose the order of integration carefully.]

26. Evaluate $\iint_R x\,dA$, where R is the region bounded by $x=\ln y$, $x=0$, and $y=e$.

27. (a) By hand or with the help of a graphing utility, make a sketch of the region R enclosed between the curves $y=x+2$ and $y=e^x$.
(b) Estimate the intersections of the curves in part (a).
(c) Viewing R as a type I region, estimate $\iint_R x\,dA$.
(d) Viewing R as a type II region, estimate $\iint_R x\,dA$.

28. (a) By hand or with the help of a graphing utility, make a sketch of the region R enclosed between the curves $y=4x^3-x^4$ and $y=3-4x+4x^2$.
(b) Find the intersections of the curves in part (a).
(c) Find $\iint_R x\,dA$.

29–32 Use double integration to find the area of the plane region enclosed by the given curves. ■

29. $y=\sin x$ and $y=\cos x$, for $0\le x\le \pi/4$.

30. $y^2=-x$ and $3y-x=4$.

31. $y^2=9-x$ and $y^2=9-9x$.

32. $y=\cosh x$, $y=\sinh x$, $x=0$, and $x=1$.

33–36 True–False Determine whether the statement is true or false. Explain your answer. ■

33. $\int_0^1\int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{x^2}^{2x}\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$

34. If a region R is bounded below by $y=g_1(x)$ and above by $y=g_2(x)$ for $a\le x\le b$, then

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

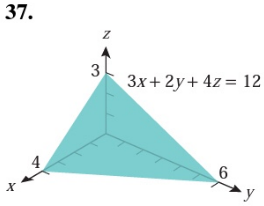
35. If R is the region in the xy-plane enclosed by $y=x^2$ and $y=1$, then

$$\iint_R f(x,y)\,dA = 2\int_0^1\int_{x^2}^1 f(x,y)\,dy\,dx$$

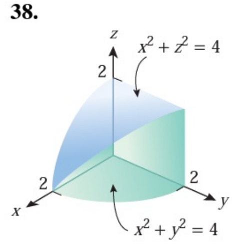
36. The area of a region R in the xy-plane is given by $\iint_R xy\,dA$.

37–38 Use double integration to find the volume of the solid. ■

37.



38.



39–44 Use double integration to find the volume of each solid. ■

39. The solid bounded by the cylinder $x^2 + y^2 = 9$ and the planes $z = 0$ and $z = 3 - x$.

40. The solid in the first octant bounded above by the paraboloid $z = x^2 + 3y^2$, below by the plane $z = 0$, and laterally by $y = x^2$ and $y = x$.

41. The solid bounded above by the paraboloid $z = 9x^2 + y^2$, below by the plane $z = 0$, and laterally by the planes $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, and $y = 2$.

42. The solid enclosed by $y^2 = x$, $z = 0$, and $x + z = 1$.

43. The wedge cut from the cylinder $4x^2 + y^2 = 9$ by the planes $z = 0$ and $z = y + 3$.

44. The solid in the first octant bounded above by $z = 9 - x^2$, below by $z = 0$, and laterally by $y^2 = 3x$.

C **45–46** Use a double integral and a CAS to find the volume of the solid. ■

45. The solid bounded above by the paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ and below by the xy-plane.

46. The solid in the first octant that is bounded by the paraboloid $z = x^2 + y^2$, the cylinder $x^2 + y^2 = 4$, and the coordinate planes.

47–52 Express the integral as an equivalent integral with the order of integration reversed. ■

47. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy\, dx$ **48.** $\displaystyle\int_0^4 \int_{2y}^{8} f(x, y)\, dx\, dy$

49. $\displaystyle\int_0^2 \int_1^{e^y} f(x, y)\, dx\, dy$ **50.** $\displaystyle\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy\, dx$

51. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sin^{-1} y}^{\pi/2} f(x, y)\, dx\, dy$ **52.** $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx\, dy$

53–56 Evaluate the integral by first reversing the order of integration. ■

53. $\displaystyle\int_0^1 \int_{4x}^{4} e^{-y^2}\, dy\, dx$ **54.** $\displaystyle\int_0^2 \int_{y/2}^{1} \cos(x^2)\, dx\, dy$

55. $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}\, dx\, dy$ **56.** $\displaystyle\int_1^3 \int_0^{\ln x} x\, dy\, dx$

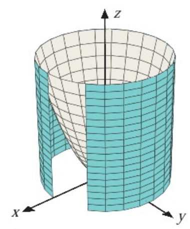
C **57.** Try to evaluate the integral with a CAS using the stated order of integration, and then by reversing the order of integration.

(a) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin \pi y^3\, dy\, dx$

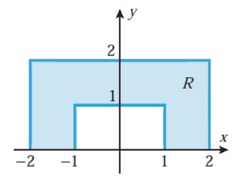
(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sin^{-1} y}^{\pi/2} \sec^2(\cos x)\, dx\, dy$

58. Use the appropriate Wallis formula (see Exercise Set 7.3) to find the volume of the solid enclosed between the circular paraboloid $z = x^2 + y^2$, the right circular cylinder $x^2 + y^2 = 4$, and the xy-plane (see the accompanying figure for cut view).

59. Evaluate $\displaystyle\iint_R xy^2\, dA$ over the region R shown in the accompanying figure.



▲ **Figure Ex-58**



▲ **Figure Ex-59**

60. Give a geometric argument to show that

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \frac{\pi}{6}$$

61–62 The ***average value*** or ***mean value*** of a continuous function $f(x, y)$ over a region R in the xy-plane is defined as

$$f_{\text{ave}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$

where $A(R)$ is the area of the region R (compare to the definition preceding Exercise 35 in Section 14.1). Use this definition in these exercises. ■

61. Find the average value of $1/(1 + x^2)$ over the triangular region with vertices $(0, 0)$, $(1, 1)$, and $(0, 1)$.

62. Find the average value of $f(x, y) = x^2 - xy$ over the region enclosed by $y = x$ and $y = 3x - x^2$.

63. Suppose that the temperature in degrees Celsius at a point (x, y) on a flat metal plate is $T(x, y) = 5xy + x^2$, where x and y are in meters. Find the average temperature of the diamond-shaped portion of the plate for which $|2x + y| \le 4$ and $|2x - y| \le 4$.

64. A circular lens of radius 2 inches has thickness $1 - (r^2/4)$ inches at all points r inches from the center of the lens. Find the average thickness of the lens.

C **65.** Use a CAS to approximate the intersections of the curves $y = \sin x$ and $y = x/2$, and then approximate the volume of the solid in the first octant that is below the surface $z = \sqrt{1 + x + y}$ and above the region in the xy-plane that is enclosed by the curves.

66. **Writing** Describe the steps you would follow to find the limits of integration that express a double integral over a nonrectangular region as an iterated double integral. Illustrate your discussion with an example.

67. **Writing** Describe the steps you would follow to reverse the order of integration in an iterated double integral. Illustrate your discussion with an example.