บทที่ 2 ปริพันธ์หลายชั้น

(Multiple Integrals)

2.1 ปริพันธ์สองชั้น

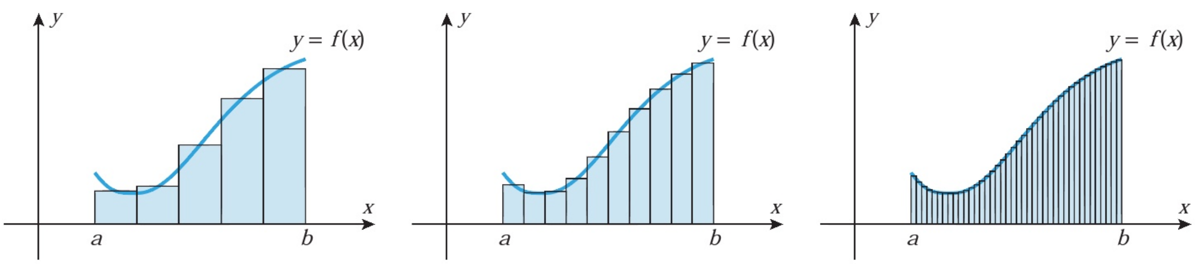
(Double Integrals)

เนื่องจากแนวคิดเกี่ยวกับปริพันธ์จำกัดเขต สามารถขยายไปยังฟังก์ชันสองตัวแปรหรือมากกว่าได้ ในหัวข้อนี้จะศึกษาเกี่ยวกับปริพันธ์สองชั้นซึ่งเป็นการขยายไปยังฟังก์ชันสองตัวแปร

นิยามของปริพันธ์สองชั้น คงจำได้ว่าปริพันธ์จำกัด

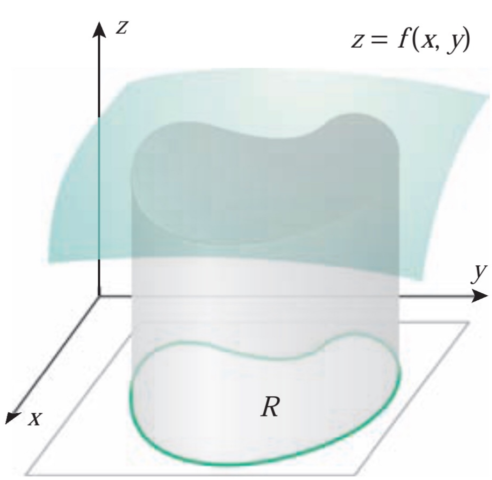
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

สร้างขึ้นจากปัญหาการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีค่าไม่เป็นลบบนช่วง $[a,b]$ ผลบวกรีมันน์ทางด้านขวามือแทนผลบวกของสี่เหลี่ยมมุมฉาก n รูป ดังรูปที่17.1.1



ในขณะที่ n เพิ่มขึ้นในลักษณะที่ว่าความกว้างของสี่เหลี่ยมมุมฉากเข้าใกล้ศูนย์ ค่าความคาดเคลื่อนของการประมาณค่าจะน้อยลง และค่าลิมิตจะเป็นค่าที่ถูกต้องของพื้นที่ใต้เส้นโค้ง แนวคิดของปริพันธ์สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปรจะสร้างขึ้นจากปัญหาปริมาตร ซึ่งสามารถกำหนดปัญหาดังนี้

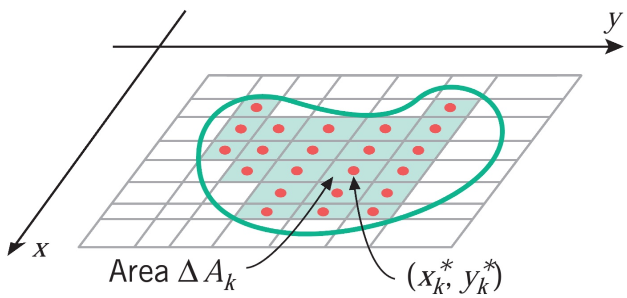
ปัญหา 2.1.1 จงหาปริมาตรของทรงตันที่บรรจุจุดที่อยู่ระหว่างบริเวณ R และพื้นผิว $z = f(x,y)$ โดยที่ f ต่อเนื่องบน R และ $f(x,y) \geq 0$ ทุกจุด (x,y) ใน R (ดูรูปที่ 17.1.2)



วิธีการหาปริมาตร V ของทรงตันในรูปที่ 17.1.2 จะคล้ายกับการใช้ขบวนการทางลิมิตที่ใช้หาพื้นที่ ยกเว้นแต่สิ่งที่จะนำมาประมาณค่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหน้าขนาน แทนการใช้สี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยจะดำเนินการดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> ใช้เส้นขนานกับแกนพิกัดแบ่งสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ล้อมรอบบริเวณ R เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อย จะไม่พิจารณาสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยที่บรรจุจุดที่ไม่อยู่ใน R จะเหลือพิจารณาเฉพาะสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เป็นสับเซตของ R (ดูรูปที่ 17.1.4) แทนพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉากเหล่านี้ด้วย

$$\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_n$$



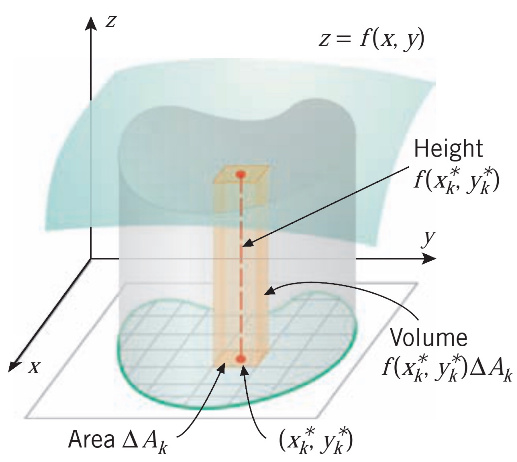
<u>ขั้นที่ 2</u> เลือกจุดใดๆ ที่อยู่ภายในสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยเหล่านี้ และแทนด้วย

$$(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*), \ldots, (x_n^*, y_n^*)$$

ดังแสดงในรูปที่ 17.1.5 ผลคูณ $f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ คือปริมาตรสี่เหลี่ยมหน้าขนานซึ่งพื้นที่ฐานเป็น ΔA_k และมีความสูงเป็น $f(x_k^*, y_k^*)$ ดังนั้นผลบวก

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

สามารถมองเป็นค่าประมาณของปริมาตร V ของทรงตันทั้งหมด



<u>ขั้นที่ 3</u> มีสองแบบที่จะทำการประมาณค่าเกิดข้อผิดพลาด แบบแรกคือสี่เหลี่ยมหน้าขนานมีส่วนบนเป็นพื้นเรียบ ขณะที่พื้นผิว $z = f(x, y)$ อาจจะเป็นโค้ง แบบที่สองคือ สี่เหลี่ยมมุมฉากที่เป็นฐาน

ของสี่เหลี่ยมหน้าขนาน ไม่คลอบคลุมบริเวณ R แต่อย่างไรก็ตาม ถ้ากระทำกระบวนการข้างต้นซ้ำอีกโดยการเพิ่มจำนวนส่วนย่อยที่แบ่ง ซึ่งจะทำให้ความยาวและความกว้างของฐานสี่เหลี่ยมมุมฉากมีค่าเข้าใกล้ศูนย์แล้ว จะทำให้ความคาดเคลื่อนทั้งสองแบบมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และปริมาตรของทรงตันคือ

$$V=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*,y_k^*)\Delta A_k$$

ผลบวกในขั้นที่ 3 เรียกว่าผลบวกรีมันน์ (Riemann sum) ลิมิตของผลบวกรีมันน์ เขียนแทนด้วย

$$\iint_R f(x,y)dA=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*,y_k^*)\Delta A_k$$

ซึ่งเรียกว่า**ปริพันธ์สองชั้น** (double integral) ของ $f(x,y)$ บน R ด้วยสัญลักษณ์นี้ ปริมาตรของทรงตันสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$V=\boxed{\iint_R f(x,y)dA}$$

ผลที่ได้นี้มาจากสมมุติฐานว่า f ต่อเนื่องและมีค่าไม่เป็นลบบนบริเวณ R ในกรณีที่ $f(x,y)$ มีค่าเป็นทั้งบวกและลบบน R ปริพันธ์สองชั้นบน R แทนด้วยผลต่างของปริมาตรสองส่วน คือ ปริมาตรของทรงตันที่อยู่เหนือ R แต่ใต้ $z=f(x,y)$ ลบด้วยปริมาตรของทรงตันที่อยู่ใต้ R แต่อยู่ใต้ $z=f(x,y)$ เรียกผลต่างนี้ว่าปริมาตรที่มีเครื่องหมาย ดังนั้นปริพันธ์สองชั้นเป็นบวกหมายความว่ามีปริมาตรเหนือ R มากกว่าปริมาตรใต้ R เป็นลบหมายความมีปริมาตรใต้ R มากกว่าปริมาตรเหนือ R เป็นศูนย์หมายความปริมาตรสองส่วนเท่ากัน

การให้นิยามที่แน่นอนซึ่งเขียนอยู่ในเทอมของ ε และ δ และเงื่อนไขที่จะทำให้ปริพันธ์สองชั้นหาค่าได้นั้นจะศึกษาในแคลคูลัสขั้นสูง แต่อย่างไรก็ตามสำหรับเป้าหมายนี้ที่เพียงพอที่จะบอกได้ว่าปริพันธ์สองชั้นจะหาค่าได้แน่นอนเมื่อ f ต่อเนื่องและไม่ซับซ้อนจนเกินไป

ให้สังเกตดูความคล้ายกันระหว่างปริพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวกับปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร เนื่องจากปริพันธ์สองชั้นมีสมบัติหลายอย่างที่เหมือนกับปริพันธ์จำกัด(ซึ่งต่อไปนี้จะเรียกว่าปริพันธ์ชั้นเดียว)

$$\iint_R cf(x,y)dA=c\iint_R f(x,y)dA \qquad (c \text{ เป็นค่าคงตัว})$$

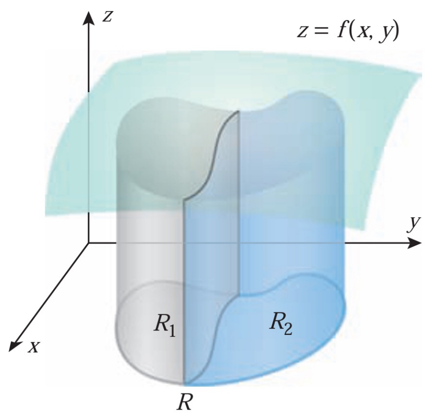
$$\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dA=\iint_R f(x,y)dA+\iint_R g(x,y)dA$$

$$\iint_R [f(x,y)-g(x,y)]dA=\iint_R f(x,y)dA-\iint_R g(x,y)dA$$

ด้วยเหตุผลนำทางว่า ถ้า $f(x,y)$ มีค่าไม่เป็นลบบน R แล้วการแบ่ง R ออกเป็นสองบริเวณคือ R_1 และ R_2 จะมีผลทำให้แบ่งทรงตันระหว่าง R กับ $z=f(x,y)$ ออกเป็นทรงตันสองก้อน ซึ่งผลบวกของปริมาตรจะเท่ากับปริมาตรของทรงตันทั้งหมด(ดูรูปที่ 17.1.6) ซึ่งเป็นแนวทางให้ได้ผลต่อไปนี้แม้ว่า f จะเป็นลบด้วย

$$\iint_R f(x,y)dA=\iint_{R_1} f(x,y)dA+\iint_{R_2} f(x,y)dA$$

โดยจะไม่พิสูจน์สมบัติเหล่านี้



การหาค่าปริพันธ์สองชั้น นอกจากคำตอบที่ง่ายที่สุดในการหาค่าปริพันธ์สองชั้นคือการหาโดยใช้ลิมิตตามนิยาม แต่จะแสดงการหาค่าปริพันธ์สองชั้นโดยการคำนวณค่าปริพันธ์ชั้นเดียวสองครั้งติดต่อกัน โดยในตอนนี้จะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ R เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากก่อน ส่วนกรณีที่บริเวณ R มีความซับซ้อนจะพิจารณาในหัวข้อต่อไป

จากการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x, y)$ คำนวณโดยให้ตัวแปรตัวหนึ่งเป็นค่าคงตัว แล้วหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอีกตัวหนึ่ง ให้พิจารณาในทางกลับกันของกระบวนการนี้ซึ่งจะเรียกว่า**ปริพันธ์ย่อย**(partial integration) กำหนดให้สัญลักษณ์

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

เป็นปริพันธ์ย่อยจำกัดเทียบกับ x เป็นการคำนวณโดยให้ y เป็นค่าคงตัว และหาปริพันธ์เทียบกับ x ทำนองเดียวกันปริพันธ์ย่อยจำกัดเทียบกับ y

เป็นการหาค่าโดยให้ x คงที่และหาปริพันธ์เทียบกับ y

ตัวอย่าง 2.1.1 จงคำนวณค่า $\int_0^1 xy^2 dx$ และ $\int_0^1 xy^2 dy$

วิธีทำ.

① Fix y ให้เป็นค่าคงที่

$$\int_{x=0}^{x=1} xy^2 dx = y^2\int_{x=0}^{x=1} x\,dx$$
$$= y^2\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1}$$
$$= y^2\frac{(1)^2}{2} - y^2\frac{(0)^2}{2}$$
$$= \frac{y^2}{2}$$

② ให้ x เป็นค่าคงตัว

$$\int_{y=0}^{y=1} xy^2 dy = x\int_{y=0}^{y=1} y^2 dy$$
$$= \frac{xy^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=1}$$
$$= \frac{x}{3}$$

จากตัวอย่างแสดงว่า การหาปริพันธ์ในรูป $\int_a^b f(x,y)dx$ จะได้ฟังก์ชันของ y ส่วนการหาปริพันธ์ในรูป $\int_a^b f(x,y)dy$ ได้ฟังก์ชันของ x กรณีนี้ทำให้สามารถพิจารณาการคำนวณในรูปแบบต่อไปนี้

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy \quad \text{และ} \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

ในกรณีแรกการหาปริพันธ์ในวงเล็บ $\int_a^b f(x,y)dx$ จะได้ฟังก์ชันของ y แล้วจึงหาปริพันธ์บนช่วง $c \le y \le d$ ส่วนในกรณีที่สองการหาปริพันธ์ในวงเล็บ $\int_c^d f(x,y)dy$ จะได้ฟังก์ชันของ x แล้วจึงหาปริพันธ์บนช่วง $a \le y \le b$ ทั้งสองกรณีเรียกว่า<u>การหาปริพันธ์ซ้อน</u>(iterated(or repeated) integrals) โดยปกติจะไม่เขียนวงเล็บจึงเขียนได้ ดังนี้

$$\rightarrow \int_{y=c}^{y=d}\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$$

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)dydx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

<u>ตัวอย่าง 2.1.2</u> จงคำนวณค่า

$(a)\ \int_0^3\int_1^2 (1+8xy)dydx \qquad (b)\ \int_1^2\left[\int_0^3 (1+8xy)dx\right]dy$

$= 57$

วิธีทำ.

(a)
$$\int_{x=0}^{x=3}\int_{y=1}^{y=2}(1+8xy)\,dydx = \int_{x=0}^{x=3}\left[\int_{y=1}^{y=2}(1+8xy)dy\right]dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=3}\left[y+\frac{8xy^2}{2}\right]_{y=1}^{y=2}dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=3}\left[(2+4x4)-(1+4x)\right]dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=3}[1+12x]dx$$

$$= x+\frac{12x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=3}$$

$$= (3+6\cdot 3^2)-(0+0)$$

$$= 57$$

ตัวอย่าง 2.1.3 จงคำนวณค่า (You try it ^_^!)

$$(a)\ \int_0^1\int_1^3 xy^2\,dx\,dy \qquad (b)\ \int_1^3\int_0^1 xy^2\,dy\,dx$$

วิธีทำ

(a)
$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=1}^{x=3} xy^2\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=1}\left[\int_{x=1}^{x=3} xy^2\,dx\right]dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_{x=1}^{x=3} dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\left(\frac{9y^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} 4y^2\,dy$$

$$= \frac{4y^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{4(1)^3}{3}-\frac{4(0)^3}{3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

(b)
$$\int_{x=1}^{x=3}\int_{y=0}^{y=1} xy^2\,dy\,dx = \int_{x=1}^{x=3}\left[\int_{y=0}^{y=1} xy^2\,dy\right]dx$$

$$= \int_{x=1}^{x=3}\left[\frac{xy^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_{x=1}^{x=3}\left(\frac{x}{3}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{3\cdot 2}\Big|_{x=1}^{x=3}$$

$$= \frac{3^2}{3\cdot 2}-\frac{1^2}{3\cdot 2}$$

$$= \frac{9-1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

จากตัวอย่างจะเห็นว่าไม่ได้เป็นบังเอิญที่การหาปริพันธ์ซ้อนทั้งสองแบบให้ผลลัพธ์เท่ากัน แต่เป็นผลของทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1.1 ให้ R เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่กำหนดโดยอสมการ

$$a \le x \le b, \quad c \le y \le d$$

ถ้า $f(x,y)$ ต่อเนื่องบนสี่เหลี่ยมนี้แล้ว

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$ ✓

(Fubini's Theorem)

Guido Fubini (1879–1943) Italian mathematician. Fubini, the son of a mathematician, showed brilliance in mathematics as a young pupil in Venice. He entered college at the Scuola Normale Superiore di Pisa in 1896 and presented his doctoral thesis on the subject of elliptic geometry in 1900 at the young age of 20. He subsequently had teaching positions at various universities, finally settling at the University of Turin where he remained for several decades. His mathematical work was diverse, and he made major contributions to many branches of mathematics. At the outbreak of World War I he shifted his attention to the accuracy of artillery fire, and following the war he worked on other applied subjects such as electrical circuits and acoustics. In 1939, as he neared age 60 and retirement, Benito Mussolini's Fascists adopted Hitler's anti-Jewish policies, so Fubini, who was Jewish, accepted a position at Princeton University, where he stayed until his death four years later. Fubini was well liked by his colleagues at Princeton and stories about him abound. He once gave a lecture on ballistics in which he showed that if you fired a projectile of a certain shape, then under the right conditions it could double back on itself and hit your own troops. Then, tongue in cheek, he suggested that one could fool the enemy by aiming this "Fubini Gun" at one's own troops and hit the unsuspecting enemy after the projectile reversed direction.

Fubini was exceptionally short, which occasionally caused problems. The story goes that one day his worried landlady called his friends to report that he had not come home. After searching everywhere, including the area near the local lake, it was discovered that Fubini was trapped in a stalled elevator and was unable to reach any of the buttons. Fubini celebrated his rescue with a party and later left a sign in his room that said, "To my landlady: When I am not home at 6:30 at night, please check the elevator. . . ."

[*Image: Wendy Wray*]

ตัวอย่าง 2.1.4 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น

$$\iint_R y^2 x dA \Rightarrow f(x,y) = y^2x : \text{ต่อเนื่อง}$$

บนสี่เหลี่ยมมุมฉาก $R = \{(x,y) : -3 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$ ⇒ Box

วิธีทำ

$$\iint y^2 x dA = \int_{x=-3}^{x=2} \int_{y=0}^{y=1} y^2 x \, dy \, dx$$

$$= \int_{x=-3}^{x=2} \left[\int_{y=0}^{y=1} y^2 x \, dy \right] dx$$

$$= \int_{x=-3}^{x=2} \left[\frac{xy^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_{x=-3}^{x=2} \left(\frac{x}{3} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{6} \Big|_{x=3}^{x=2}$$

$$= \frac{2^2}{6} - \frac{3^2}{6}$$

$$= \frac{4-9}{6} = \frac{5}{6}$$

ตัวอย่าง 2.1.5 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น (You try it!)

$$\iint_R \left(2x^2 - 3y\right) dA$$

โดยที่ R คือบริเวณที่ประกอบด้วยจุด (x, y) ซึ่ง $-1 \le x \le 2$ และ $1 \le y \le 3$

วิธีทำ

$$\iint_R (2x^2 - 3y)\, dA \overset{\text{Fubini's Thm.}}{=} \int_{y=1}^{y=3} \int_{x=-1}^{x=2} (2x^2 - 3y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{y=1}^{y=3} \left[\int_{x=-1}^{x=2} (2x^2 - 3y)\, dx \right] dy$$

$$= \int_{y=1}^{y=3} \left[\frac{2x^3}{3} - 3xy \right]_{x=-1}^{x=2} dy$$

$$= \int_{y=1}^{y=3} \left[\left(\frac{16}{3} - 6y \right) - \left(-\frac{2}{3} + 3y \right) \right] dy$$

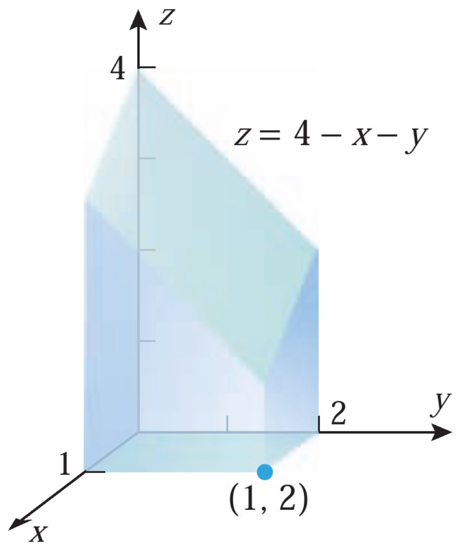
$$= \int_{y=1}^{y=3} [6 - 9y]\, dy$$

$$= 6y - \frac{9y^2}{2} \Big|_{y=1}^{y=3}$$

$$= \left(18 - \frac{81}{2}\right) - \left(6 - \frac{9}{2}\right)$$

$$= 12 - 36 = -24$$

ตัวอย่าง 2.1.6 จงหาปริมาตรของทรงตันที่มีระนาบ $z = 4 - x - y$ เป็นขอบเขตบนและมีสี่เหลี่ยมมุมฉาก $R = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$ เป็นขอบเขตล่าง



$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=2} (4-x-y)\,dy\,dx = \ldots ?$$

<u>ตัวอย่าง 2.1.7</u> จงหาปริมาตรของทรงตันซึ่งฐานอยู่ในระนาบ XY และล้อมรอบด้วยระนาบ $x = 2, y = 1, y = 2$ และแกน Y และด้านบนคือพื้นผิว $z = x^2 + y^2$ (You try it!)

$$\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=1}^{y=2}(x^2+y^2)\,dy\,dx = ?$$

Exercise:

1–12 Evaluate the iterated integrals.

1. $\int_0^1 \int_0^2 (x+3)\,dy\,dx$

2. $\int_1^3 \int_{-1}^1 (2x-4y)\,dy\,dx$

3. $\int_2^4 \int_0^1 x^2 y\,dx\,dy$

4. $\int_{-2}^0 \int_{-1}^2 (x^2+y^2)\,dx\,dy$

5. $\int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{x+y}\,dy\,dx$

6. $\int_0^2 \int_0^1 y \sin x\,dy\,dx$

7. $\int_{-1}^0 \int_2^5 dx\,dy$

8. $\int_4^6 \int_{-3}^7 dy\,dx$

9. $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2}\,dy\,dx$

10. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 x \cos xy\,dy\,dx$

11. $\int_0^{\ln 2} \int_0^1 xy e^{y^2 x}\,dy\,dx$

12. $\int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\,dx$

13–16 Evaluate the double integral over the rectangular region R.

13. $\iint_R 4xy^3\,dA$; $R = \{(x,y) : -1 \le x \le 1, -2 \le y \le 2\}$

14. $\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,dA$;

$R = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

15. $\iint_R x\sqrt{1-x^2}\,dA$; $R = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 2 \le y \le 3\}$

16. $\iint_R (x \sin y - y \sin x)\,dA$;

$R = \{(x,y) : 0 \le x \le \pi/2, 0 \le y \le \pi/3\}$

Exercise (Cont.)

23–26 True–False Determine whether the statement is true or false. Explain your answer.

23. In the definition of a double integral

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

the symbol ΔA_k represents a rectangular region within R from which the point (x_k^*, y_k^*) is taken.

24. If R is the rectangle $\{(x, y) : 1 \le x \le 4, 0 \le y \le 3\}$ and $\int_0^3 f(x, y)\, dy = 2x$, then

$$\iint_R f(x, y)\, dA = 15$$

25. If R is the rectangle $\{(x, y) : 1 \le x \le 5, 2 \le y \le 4\}$, then

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_1^5 \int_2^4 f(x, y)\, dx\, dy$$

26. Suppose that for some region R in the xy-plane

$$\iint_R f(x, y)\, dA = 0$$

If R is subdivided into two regions R_1 and R_2, then

$$\iint_{R_1} f(x, y)\, dA = -\iint_{R_2} f(x, y)\, dA$$

Exercise (Cont.)

29–32 Use a double integral to find the volume.

29. The volume under the plane $z = 2x + y$ and over the rectangle $R = \{(x, y) : 3 \le x \le 5, 1 \le y \le 2\}$.

30. The volume under the surface $z = 3x^3 + 3x^2 y$ and over the rectangle $R = \{(x, y) : 1 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$.

31. The volume of the solid enclosed by the surface $z = x^2$ and the planes $x = 0$, $x = 2$, $y = 3$, $y = 0$, and $z = 0$.

32. The volume in the first octant bounded by the coordinate planes, the plane $y = 4$, and the plane $(x/3) + (z/5) = 1$.

33. Evaluate the integral by choosing a convenient order of integration:

$$\iint_R x \cos(xy) \cos^2 \pi x \, dA; \; R = \left[0, \tfrac{1}{2}\right] \times [0, \pi]$$

34. (a) Sketch the solid in the first octant that is enclosed by the planes $x = 0$, $z = 0$, $x = 5$, $z - y = 0$, and $z = -2y + 6$.

(b) Find the volume of the solid by breaking it into two parts.