(ทอง!)

ตัวอย่าง 1.1.4 กำหนดให้ S แทนพื้นผิวซึ่งมีสมการเป็น

$$F(x,y,z)=x^2+y^2-z-1=0 \quad (*)$$

จงหาค่าตัดแกน X ค่าตัดแกน Y และค่าตัดแกน Z ของ S

① ② ③

Sol^n. ① x-intercept: Setting $y=z=0$ in $(*)$, we have $x^2-1=0$
$\Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$. นั่นคือ จุดตัดแกน x คือ $(1,0,0)$ และ $(-1,0,0)$

② y-intercept: $y=\pm 1 \Rightarrow$ จุดตัดแกน คือ $(0,\pm 1,0)$

③ z-intercept: $z=-1 \Rightarrow$ จุดตัดแกน คือ $(0,0,-1)$.

สมบัติอีกอันหนึ่งที่จะช่วยในการพิจารณาลักษณะของพื้นผิวคือ รอยตัดของพื้นผิว ซึ่งมีนิยามดังนี้

นิยาม 1.1.2 กำหนดให้ S แทนพื้นผิว รอยตัดของพื้นผิว (Section of surface) ของ S คือ เส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของพื้นผิวกับระนาบ รอยตัดของพื้นผิวที่เกิดจากการตัดกันของพื้นผิวกับระนาบพิกัด เรียกว่ารอยตัด (Trace) รอยตัดที่เกิดจากพื้นผิวกับระนาบ xy เรียกว่ารอยตัดของระนาบ xy (xy-trace) รอยตัดที่เกิดจากพื้นผิวกับระนาบ xz เรียกว่ารอยตัดของระนาบ xz (xz-trace) รอยตัดที่เกิดจากพื้นผิวตัดกับระนาบ yz เรียกว่ารอยตัดของระนาบ yz (yz-trace)

การหารอยตัดของพื้นผิว ทำได้โดยการแทนค่าตัวแปรที่ได้จากสมการของระนาบในสมการของพื้นผิว สำหรับการหารอยตัดบนระนาบ xy ทำได้โดยการแทนค่า $z=0$ หารอยตัดบนระนาบ xz ทำได้โดยการแทนค่า $y=0$ และหารอยตัดบนระนาบ yz ทำได้โดยการแทนค่า $x=0$

ตัวอย่าง 1.1.5 กำหนดให้ S เป็นพื้นผิวที่มีสมการเป็น $x^2+2y^2-4y+3z-7=0 \quad (*)$
จงหารอยตัดบนระนาบ xy รอยตัดของ S บนระนาบ $x=2$ และรอยตัดของ S บนระนาบ $z=3$

① ② ③

Sol^n: ① The trace in the xy-plane: แทน $z=0$ ใน $(*)$ จะได้

$x^2+2y^2-4y+3(0)-7=0 \Rightarrow x^2+2y^2-4y-7=0$

$\Rightarrow x^2+2(y^2-2y+1)=7+2$

$\Rightarrow x^2+2(y-1)^2=9 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{2(y-1)^2}{9}=1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

ดังนั้น รอยตัดบนระนาบ XY คือ วงรี $x^2+2y^2-4y-7=0$

② รอยตัดบนระนาบ $x=2$: ให้ $x=2$ ใน ⊛ จะได้

$(2)^2+2y^2-4y+3z-7=0 \Rightarrow 2y^2-4y+3z-3=0$

$\Rightarrow 2y^2-4y+3z = 3 \Rightarrow 2(y^2-2y\quad)+3z = 3$

$\Rightarrow 2(y^2-2y+1)+3z = 3+2 = 5$

$\Rightarrow 2(y-1)^2+3z = 5 \Rightarrow 2(y-1)^2 = -3\left(z-\frac{5}{3}\right)$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = -\frac{3}{2}\left(z-\frac{5}{3}\right)$$

ดังนั้น รอยตัดบนระนาบ $x=2$ เป็นพาราโบลา

$$(y-1)^2 = 4\left(-\frac{3}{8}\right)\left(z-\frac{5}{3}\right)$$

③ บนระนาบ $z=3$: ให้ $z=3$ ใน ⊛ จะได้

$x^2+2y^2-4y+3(3)-7=0$

$\Rightarrow x^2+2y^2-4y+2 = 0$

$\Rightarrow x^2+2(y^2-2y+1) = 0$

$\Rightarrow x^2+2(y-1)^2 = 0$

$\Rightarrow x^2=0$ และ $2(y-1)^2=0$

$\Rightarrow x=0$ และ $(y-1)=0$

$\Rightarrow x=0$ และ $y=1 \Rightarrow (0,1,3)$

ดังนั้น รอยตัดบนระนาบ $z=3$ คือ จุด $(0,1,3)$ ∎

ตัวอย่าง 1.1.6 กำหนดให้ S เป็นพื้นผิวที่มีสมการเป็น $x^2+y^2+z^2+4x-6y+8z-7=0$ จงหารอยตัดบนระนาบ xy รอยตัดของ S บนระนาบ $x=-2$ และรอยตัดของ S บนระนาบ $y=3$

① $(z=0)$ ② $(x=-2)$ ③ (แทน $y=3$)

Sol แทน $z=0 \Rightarrow x^2+y^2+4x-6y-7=0$

$\Rightarrow (x^2+4x+4)+(y^2-6y+9) = 7+4+9$

$\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2 = 20 = (\sqrt{20})^2$

สรุปได้ รอยตัดเป็นวงกลม $(x+2)^2+(y-3)^2 = (\sqrt{20})^2$

② รอยตัดเป็นวงกลมที่จุดศูนย์กลางเป็น $(3,-4)$ และมีรัศมี 6 หน่วยบนระนาบ $x=-2$

③ รอยตัดเป็นวงกลมที่จุดศูนย์กลาง $(-2,-4)$ รัศมี 6 หน่วย บนระนาบ $y=3$

สมบัติอันสุดท้ายของพื้นผิวที่จะกล่าวถึง เพื่อจะนำไปช่วยในการพิจารณาลักษณะของพื้นผิวคือการสมมาตร ซึ่งมีนิยามดังนี้

นิยาม 1.1.3 กำหนดให้ S เป็นพื้นผิว แล้วจะได้ว่า

①
- S จะสมมาตร (symmetry) โดยจุดกำเนิด ถ้าแทนค่า x,y,z ด้วย $-x,-y,-z$ ตามลำดับในสมการของ S แล้ว ได้สมการคงเดิม S

②
- S จะสมมาตรโดยแกน X ถ้าแทน y,z ด้วย $-y,-z$ ตามลำดับในสมการของ S แล้ว ได้สมการคงเดิม
- S จะสมมาตรโดยแกน Y ถ้าแทน x,z ด้วย $-x,-z$ ตามลำดับในสมการของ S แล้ว ได้สมการคงเดิม
- S จะสมมาตรโดยแกน Z ถ้าแทน x,y ด้วย $-x,-y$ ตามลำดับในสมการของ S แล้ว ได้สมการคงเดิม

③
- S จะสมมาตรโดยระนาบ xy ถ้าแทน z ด้วย $-z$ ในสมการของ S แล้ว ได้สมการคงเดิม
- S จะสมมาตรโดยระนาบ xz ถ้าแทน y ด้วย $-y$ ในสมการของ S แล้ว ได้สมการคงเดิม
- S จะสมมาตรโดยระนาบ yz ถ้าแทน x ด้วย $-x$ ในสมการของ S แล้ว ได้สมการคงเดิม

ตัวอย่าง 1.1.7 กำหนดให้ S เป็นพื้นผิวที่มีสมการเป็น $x^2-y^2+z^2+2x-5=0$ จงตรวจสอบว่า S สมมาตรโดยจุดกำเนิด แกน X และระนาบ xz หรือไม่ เพราะเหตุใด

① $(-x,-y,-z)$ ② $(-y,-z)$ ③ $(-y)$

① $(-x)^2-(-y)^2+(-z)^2+2(-x)-5=0$

$\Rightarrow x^2-y^2+z^2-2x-5=0$

เนื่องจาก แทน $(-x,-y,-z)$ แล้ว สมการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นพื้นผิว S ไม่สมมาตรจุด กำเนิด

แบบฝึกหัด 1.1

จงหารอยตัดของพื้นผิวกับระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด ค่าตัดแกน รอยตัด การสมมาตร ของพื้นผิวต่อไปนี้

1. $x^2+y^2+z^2=10$
2. $x^2+y^2+z^2=9$
3. $x^2+y^2+2y^2=8$
4. $x^2+2y^2+4z^2=8$
5. $x^2-y^2+z^2=9$
6. $x^2+y^2+z^2=4$
7. $x^2-y^2+z^2=2$
8. $x^2-3y^2-z^2=9$
9. $x^2+xy=z$
10. $y^2-yz=x$
11. $z=xy$
12. $z=xy+y$
13. $x^2+z^2=4y$
14. $x^2-z^2=y$
15. $x^2=xy$
16. $z^2=xy-y$
17. $x^2+4y^2=4$
18. $x^2-2y=1$
19. $y=2xz-z$
20. $x=2yz+z$

① ค่าตัดแกน

② รอยตัด บนระนาบ xy

——— yz

——— xz

③ Check! การสมมาตร

ใน ระนาบ xy

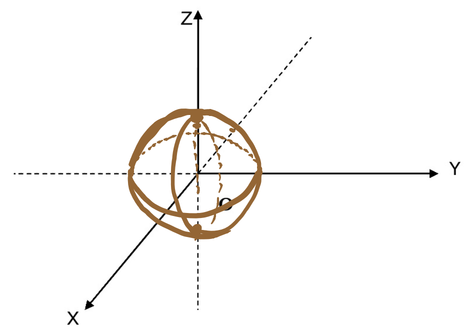
——— yz

——— xz

1.2. สมการของพื้นผิว

ในหัวข้อนี้จะแสดงวิธีการหาสมการพื้นผิว ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ พื้นผิวที่ได้จะมีชื่อเรียกแตกต่างกันไปตามลักษณะพื้นผิวนั้นๆ ก่อนอื่นจะหาสมการของพื้นผิวที่มีลักษณะเป็นทรงกลม (Sphere)

นิยาม 1.2.1 ทรงกลม (Sphere) คือเซตของจุดในสามมิติซึ่งมีระยะห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางคงที่ จุดคงที่เรียกว่าจุดศูนย์กลาง (Center) ของทรงกลม และระยะทางคงที่เรียกว่ารัศมี (Radius) ของทรงกลม



การหาสมการของทรงกลมทำได้ดังนี้ ให้ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ เป็นจุดศูนย์กลางของทรงกลม ซึ่งมีรัศมี r และ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใดๆ บนพื้นผิว จะได้ว่า

$$\left|\overrightarrow{P_1P}\right| = r$$

ดังนั้น $\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} = r$

นั่นคือ $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = r^2$ ← รัศมี

เป็นสมการของทรงกลม และเรียกสมการนี้ว่าสมการรูปมาตรฐาน (Standard form) ถ้ากระจายสมการทรงกลมรูปมาตรฐานและจัดใหม่ จะได้สมการอยู่ในรูป

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

เรียกสมการในรูปนี้ว่าสมการรูปทั่วไป (General form) ของทรงกลม จากสมการทรงกลมในรูปทั่วไปถ้าจัดให้อยู่ในรูปมาตรฐานก็จะทราบจุดศูนย์กลางและรัศมีของทรงกลม

ตัวอย่าง 1.2.1 จงหาจุดศูนย์กลาง (1) และรัศมี (2) ทรงกลมซึ่งมีสมการเป็น

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 8z - 7 = 0$$

⇒ จัดให้อยู่ในรูปมาตรฐาน $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2$

(x_1, y_1, z_1) : จ.ศก, r : รัศมี

Sol n.

ย้ายข้าง $x^2+y^2+z^2+4x-6y+8z = 7$

$$\Rightarrow (x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)+(z^2+8z+16) = 7 +4+9+16$$

$$\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2 = 36 = 6^2$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(-2,3,-4)$ และรัศมี คือ 6 หน่วย

ตัวอย่าง 1.2.2 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีทรงกลมซึ่งมีสมการเป็น

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y + 14z - 6 = 0$$