ทบทวน (ต่อ)!

• วงรี (Ellipse) : ให้ $a > b > 0$ จะได้สมการมาตรฐานของวงรี คือ

$$\rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

• แกนเอก : $y = k$
• แกนโท : $x = h$
• ความยาวแกนเอก : $2a$
• ความยาวแกนโท : $2b$
• จุดศก. : (h,k)
• จุดยอด : $(h \pm a, k)$
• ความยาว c-t-f : $c = \sqrt{a^2-b^2}$
• จุดโฟกัส : $(h \pm c, k)$

center to focus

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

• แกนเอก : $x = h$
• แกนโท : $y = k$
• ความยาวแกนเอก : $2a$
• ความยาวแกนโท : $2b$
• จุดศก. : (h,k)
• จุดยอด : $(h, k \pm a)$
• ความยาว c-t-f : $c = \sqrt{a^2-b^2}$
• จุดโฟกัส : $(h, k \pm c)$

Ex. จงหาความยาวแกนเอก แกนโท พิกัดของจุดโฟกัส จุดยอด ของวงรี พร้อมทั้งวาดกราฟ

① $25x^2 + 4y^2 = 100$

วิธีทำ. เนื่องจาก $25x^2 + 4y^2 = 100$

จะได้

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

b^2 $\quad a^2$

จะได้ แกนเอก : Y-axis $[x = 0]$

แกนโท : X-axis $[y = 0]$

$\uparrow a$

ความยาวแกนเอก : $2(5) = 10$

ความยาวแกนโท : $2(2) = 4$

จุด ศก. : $(0,0)$

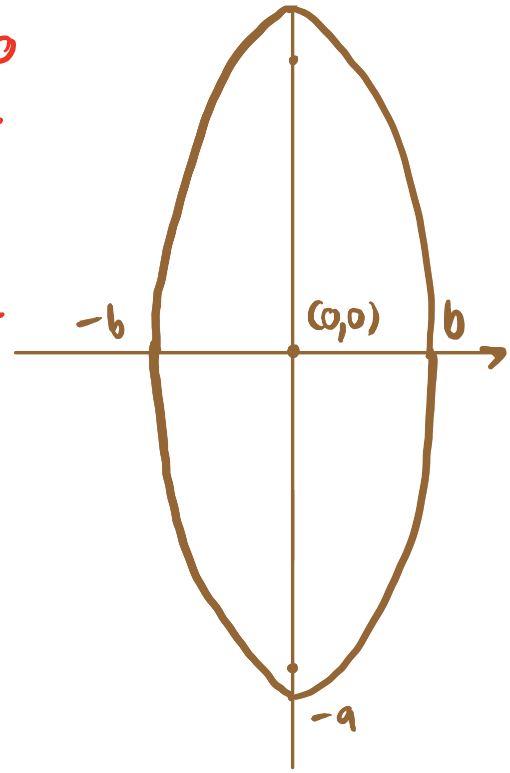
จุดยอด : $(0, \pm 5)$

ความยาว c-t-f : $c = \sqrt{5^2 - 2^2}$

$= \sqrt{25-4}$

$= \sqrt{21}$

จุดโฟกัส : $(0, \pm\sqrt{21})$



(2) $x^2 + 25y^2 + 4x = 1$

• ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola): สมการมาตรฐาน

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

• จุด ศก. : (h,k)
• จุดยอด : $(h \pm a, k)$
• ความยาว c-t-f : $c = \sqrt{a^2+b^2}$
• จุดโฟกัส : $(h \pm c, k)$
• แกนตามขวาง : $y = k$
• แกนสังยุค : $x = h$
• ความยาวแกนสังยุค : $2b$
• ความยาวแกนตามขวาง : $2a$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

• จุด ศก. : (h,k)
• จุดยอด : $(h, k \pm a)$
• ความยาว c-t-f : $c = \sqrt{a^2+b^2}$
• จุดโฟกัส : $(h, k \pm c)$
• แกนตามขวาง : $x = h$
• แกนสังยุค : $y = k$
• ความยาวแกนสังยุค : $2b$
• ความยาวแกนตามขวาง : $2a$

Ex. จงร่างกราฟของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

Ex. จงร่างกราฟของไฮเพอร์โบลา $x^2-4y^2-2x+8y-7=0$

• พิจารณาสมการลำดับชั้นสองของตัวแปร x และ y ดังนี้

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

เราจะสามารถวิเคราะห์กราฟได้ดังนี้

• ถ้า $B^2-4AC=0$ แล้ว • มีกราฟ - พาราโบลา
- เส้นตรงหนึ่งเส้น

• ไม่มีกราฟ

• ถ้า $B^2-4AC<0$ แล้ว • มีกราฟ - วงรี • ไม่มีกราฟ
- วงกลม
- จุด

• ถ้า $B^2-4AC>0$ แล้ว • มีกราฟ - ไฮเพอร์โบลา
- เส้นตรงสองเส้นตัดกัน

Ex. จงวิเคราะห์สมการต่อไปนี้

① $\underbrace{3}_{A}x^2\underbrace{-6}_{B}xy+\underbrace{3}_{C}y^2+2x-7=0 \Rightarrow B^2-4AC$

$=(-6)^2-4(3)(3)$

$=36-36=0$

$\Rightarrow$ • มีกราฟ - พาราโบลา และ • ไม่มีกราฟ
- เส้นตรงหนึ่ง

(2) $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$: $(-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$

(3) $xy - y^2 - 5y + 1 = 0$: $(1)^2 - 4(0)(-1) = 1 > 0$

บทที่ 1: พื้นผิวและระบบพิกัด (Surfaces and Coordinate Systems)

1 Surfaces (พื้นผิว)

บทนิยาม: ถ้า S เป็นพื้นผิว (Surface) ของสมการ $F(x,y,z)=0$ ในระบบ 3D เราจะเรียก

- "$x=a$" ว่า "ค่าตัดแกน X" (x-intercept) ถ้า $F(a,0,0)=0$
- "$y=b$" ว่า "ค่าตัดแกน Y" (y-intercept) ถ้า $F(0,b,0)=0$
- "$z=c$" ว่า "ค่าตัดแกน Z" (z-intercept) ถ้า $F(0,0,c)=0$

และเราจะเรียกจุด
- $(a,0,0)$ ว่า จุดตัดแกน X
- $(0,b,0)$ ว่า จุดตัดแกน Y
- $(0,0,c)$ ว่า จุดตัดแกน Z

Ex. กำหนดให้ S เป็นพื้นผิวของสมการ $x^2+y^2+z-4=0$ จงหา x-intercept, y-intercept and z-intercept.

วิธีทำ X-intercept: Setting $y=z=0$ in $x^2+y^2+z-4=0$, we have $x^2+0^2+0-4=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$

$\Rightarrow x=\pm 2.$

Y-intercept:

Z-intercept:

Ex. กำหนดให้ S เป็น Surface of $4x^2+y^2+z^2-16=0$
จงหา x-intercept, y-intercept and z-intercept.