

กรวย (Cone) : ฐาน C เป็นเส้นโค้งที่กำหนด และ:
 $V(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดยอดของกรวย

• การหาสมการพื้นผิวของกรวย :

① ฐาน $P(x, y, z)$ เป็นจุดใดๆ บนกรวย

② Note! "เส้นตรงที่ลากจากจุดที่กำหนดที่ผ่าน $P(x, y, z)$ "

และจุดยอด $V(x_0, y_0, z_0)$ จะตั้งฉากกับ

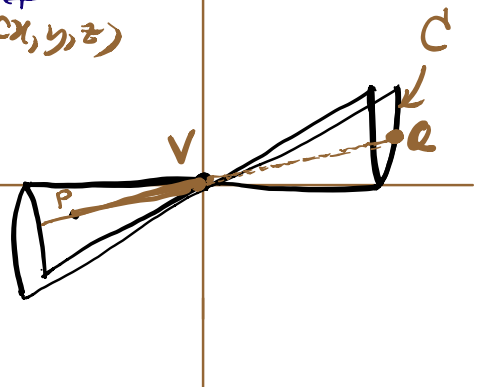
เส้นโค้ง C ที่จุด $Q(x', y', z')$

[มุมสัมผัสโค้ง] โดยที่

$$\vec{PV} \parallel \vec{VQ}$$

$$[\exists m \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \vec{PV} = m \vec{VQ}]$$

③ Note! $Q(x', y', z') \in C$



Ex. สมการของกรวยที่มีจุดยอด $(0, 1, 0)$ เป็นจุดยอด และมีเส้นโค้งที่กำหนดโดย $z = x^2$ $y = 5 = C$ ฐาน

วิธีทำ ① ฐาน $P(x, y, z)$ เป็นจุดใดๆ บนกรวย

② Note! $\Rightarrow \vec{PV} \parallel \vec{VQ}$ โดยที่ $Q(x', y', z') \in C$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{R} \text{ s.t.}$$

$$\vec{PV} = m \vec{VQ}$$

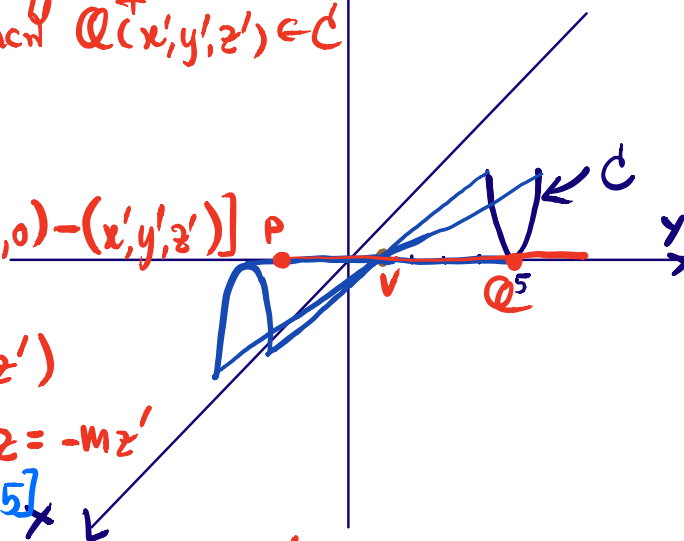
$$\Rightarrow (x, y, z) - (0, 1, 0) = m[(0, 1, 0) - (x', y', z')]$$

$$\Rightarrow (x, y-1, z) = m(-x', 1-y', -z')$$

$$\Rightarrow x = -mx', y-1 = m(1-y') \text{ และ } z = -mz'$$

$$\text{เนื่องจาก } Q(x', y', z') \in C \Rightarrow y' = 5$$

$$\Rightarrow x = -mx', y-1 = m(1-5) \text{ และ } z = -mz'$$



$$y-1 = -4m$$

$$m = \frac{1-y}{4}$$

$$x = -\left(\frac{1-y}{4}\right)x'$$

$$z = -\left(\frac{1-y}{4}\right)z'$$

$$x' = \frac{4x}{y-1}$$

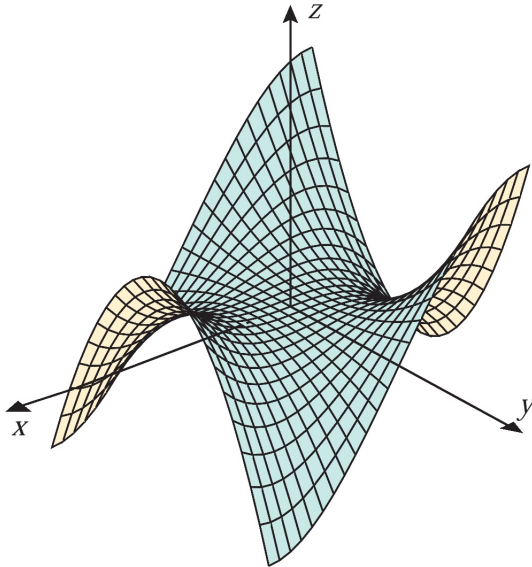
$$z' = \frac{4z}{y-1}$$

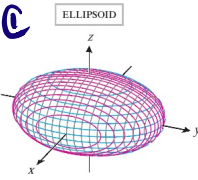
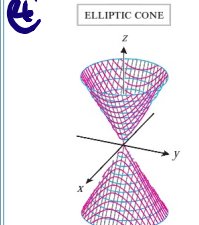
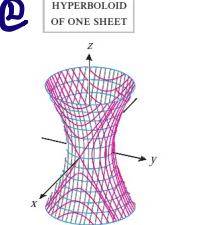
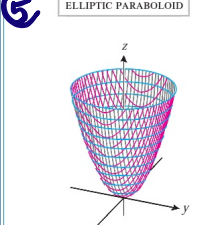
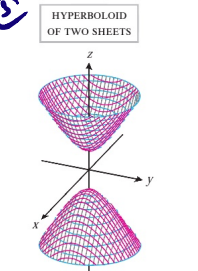
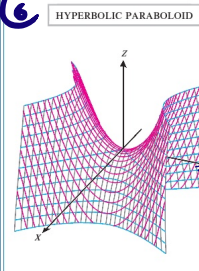
③ Μπορούμε $(ax', m', z') \in \mathbb{C}$ αντίστοιχα

$$z' = (x')^2 \Rightarrow \frac{4z}{y-1} = \left(\frac{4x}{y-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow z = \frac{4x^2}{y-1}$$

Quadric Surfaces.

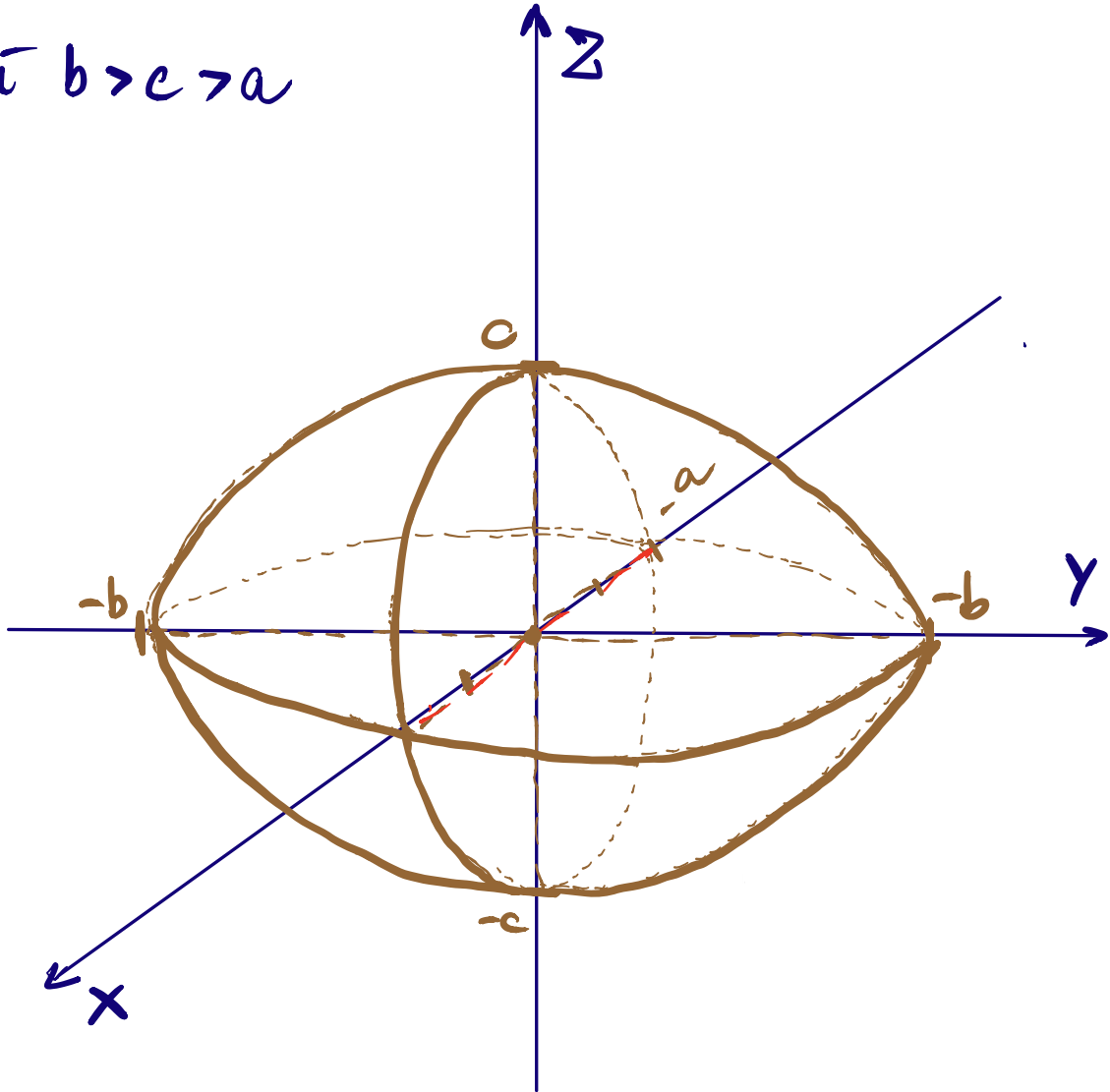


SURFACE	EQUATION	SURFACE	EQUATION
 <p>ELLIPSOID</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>The traces in the coordinate planes are ellipses, as are the traces in those planes that are parallel to the coordinate planes and intersect the surface in more than one point.</p>	 <p>ELLIPTIC CONE</p>	$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ <p>The trace in the xy-plane is a point (the origin), and the traces in planes parallel to the xy-plane are ellipses. The traces in the yz- and xz-planes are pairs of lines intersecting at the origin. The traces in planes parallel to these are hyperbolas.</p>
 <p>HYPERBOLOID OF ONE SHEET</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>The trace in the xy-plane is an ellipse, as are the traces in planes parallel to the xy-plane. The traces in the yz-plane and xz-plane are hyperbolas, as are the traces in those planes that are parallel to these and do not pass through the x- or y-intercepts. At these intercepts the traces are pairs of intersecting lines.</p>	 <p>ELLIPTIC PARABOLOID</p>	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ <p>The trace in the xy-plane is a point (the origin), and the traces in planes parallel to and above the xy-plane are ellipses. The traces in the yz- and xz-planes are parabolas, as are the traces in planes parallel to these.</p>
 <p>HYPERBOLOID OF TWO SHEETS</p>	$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p>There is no trace in the xy-plane. In planes parallel to the xy-plane that intersect the surface in more than one point the traces are ellipses. In the yz- and xz-planes, the traces are hyperbolas, as are the traces in those planes that are parallel to these.</p>	 <p>HYPERBOLIC PARABOLOID</p>	$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ <p>The trace in the xy-plane is a pair of lines intersecting at the origin. The traces in planes parallel to the xy-plane are hyperbolas. The hyperbolas above the xy-plane open in the y-direction, and those below in the x-direction. The traces in the yz- and xz-planes are parabolas, as are the traces in planes parallel to these.</p>

① Ellipsoids.

นิยาม 1.3.2 พื้นผิวกำลังสองที่มีสมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัวที่มากกว่าศูนย์ เรียกว่าทรงรี (Ellipsoids)

$$\text{หรือ } b > c > a$$



ค่าตัดแกน X, Y, Z ของทรงรี คือ $x = \pm a, y = \pm b$ และ $z = \pm c$ ตามลำดับ

รอยตัดบนระนาบ xy คือ วงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$

รอยตัดบนระนาบ xz คือ วงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$

รอยตัดบนระนาบ yz คือ วงรี $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0$

รอยตัดบนระนาบ $x = k$ คือ วงรี $\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{k^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{k^2}{a^2}\right)} = 1, x = k, -a < k < a$

รอยตัดบนระนาบ $y = k$ คือ วงรี

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{k^2}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{k^2}{b^2}\right)} = 1, y = k, -b < k < b$$

รอยตัดบนระนาบ $z = k$ คือ วงรี

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1, z = k, -c < k < c$$

สมมาตรโดยแกน X, Y, Z ระนาบ xy, xz, yz และจุดกำเนิด

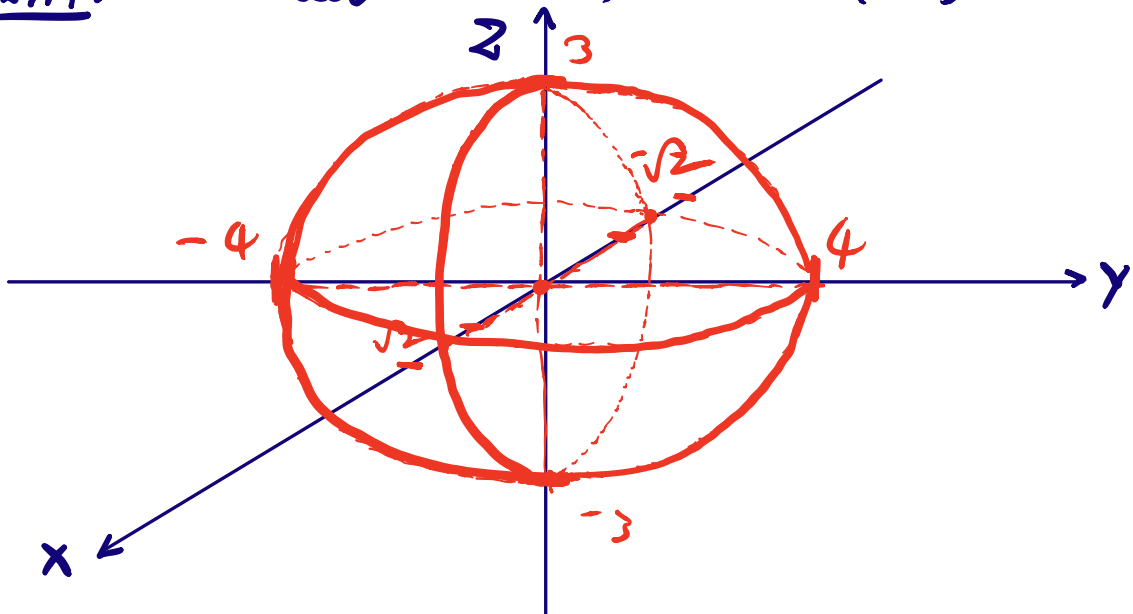
[แทนเลขจุดรูปได้โดย
ไม่ต้องทำ!]

ตัวอย่าง 1.3.1 จงหาค่าตัดแกน รอยตัดบนระนาบพิกัด รอยตัดบนระนาบ $x = 1, y = 3, z = 2$ และ

พิจารณาการสมมาตรของทรงรี $144x^2 + 18y^2 + 32z^2 = 288$

วิธีทำ. (ใน sheet ๐. คำสั่ง)

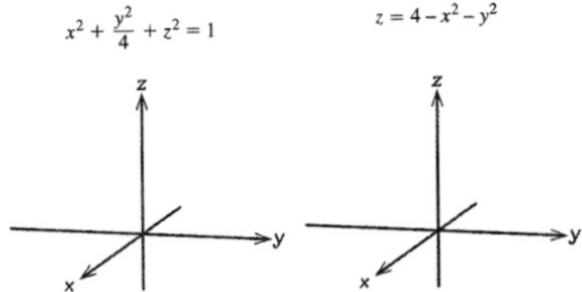
$$\leftrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$$



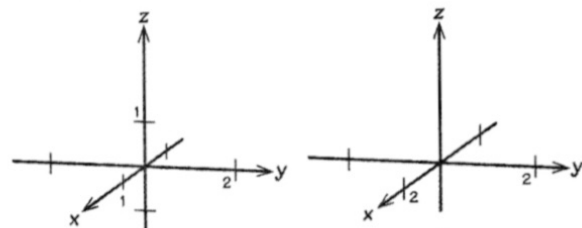
DRAWING LESSON 4
How to Draw Quadric Surfaces

You try it!

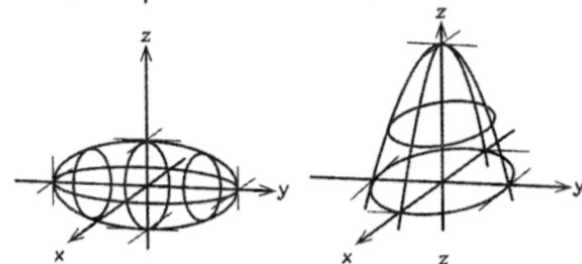
1 Lightly sketch the three coordinate axes.



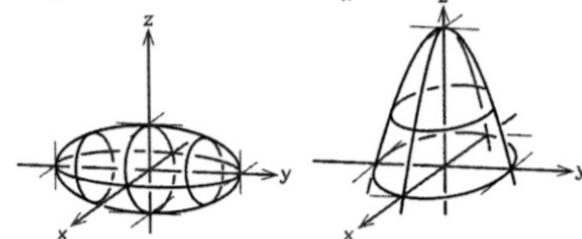
2 Decide on a scale and mark the intercepts on the axes.



3 Sketch cross sections in the coordinate planes and in a few parallel planes, but don't clutter the picture. Use tangent lines as guides.



4 If more is required, darken the parts exposed to view. Leave the rest light. Use line breaks when you can.



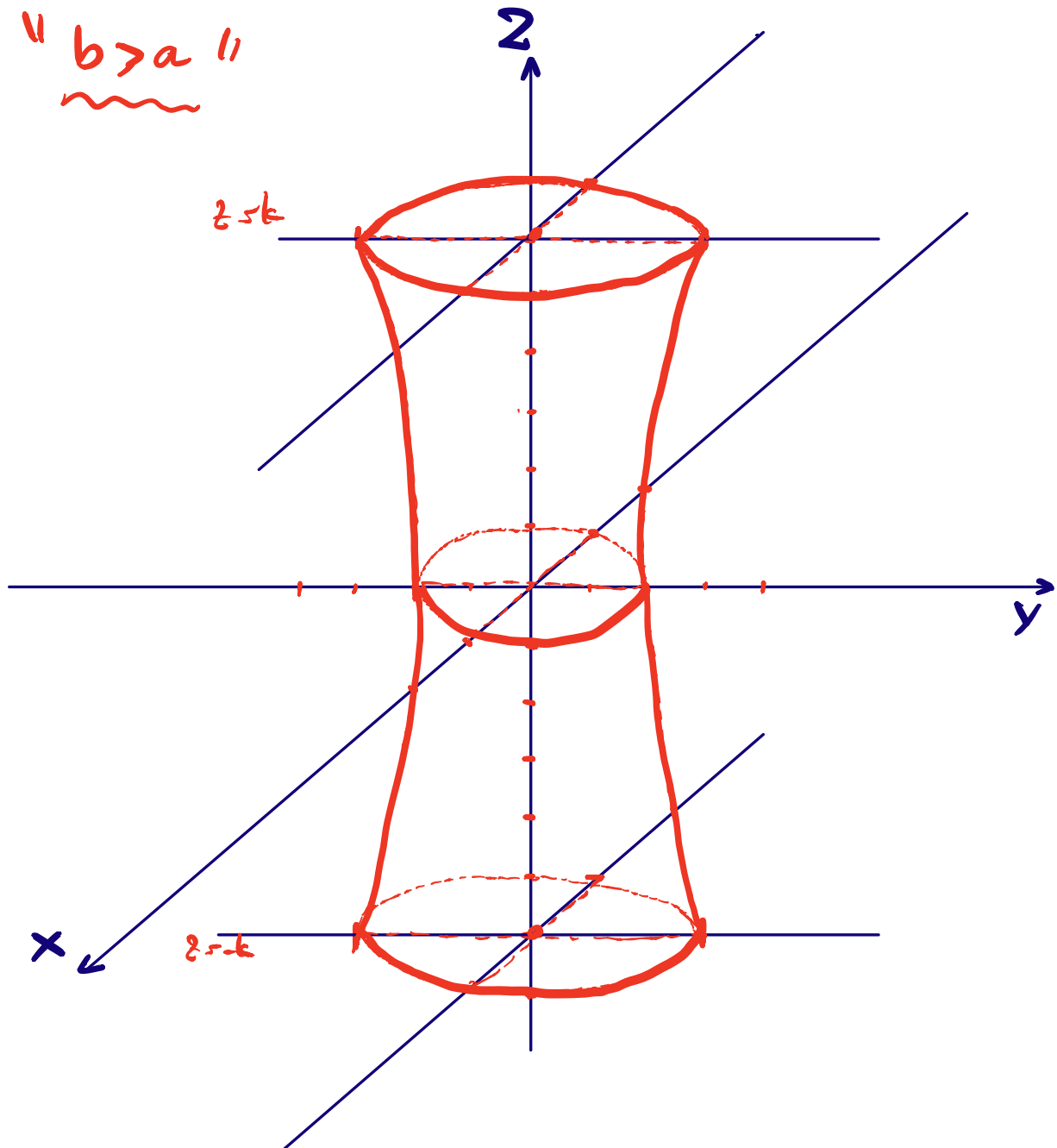
Try! "Example 1.3.2"

ตัวอย่าง 1.3.2 จงหาค่าตัดแกน รอยตัดบนระนาบพิกัด รอยตัดบนระนาบ $x=1, y=2, z=0.5$ และ

พิจารณาการสมมาตรของทรงรี $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$

๑ Elliptic Hyperboloid of one sheet.

นิยาม 1.3.3 พื้นผิวที่มีสมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว เรียกว่าทรงไฮเพอร์โบลาคีงวงรีส่วนเดียว (Elliptic hyperboloid of one sheet)



ค่าตัดแกน X และแกน Y คือ $x = \pm a, y = \pm b$ ไม่ตัดแกน Z

รอยตัดบนระนาบ xy คือวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$

รอยตัดบนระนาบ xz คือไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$

รอยตัดบนระนาบ yz คือไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0$

รอยตัดบนระนาบ $x = k$ คือ ไฮเพอร์โบลา

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{k^2}{a^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{k^2}{a^2}\right)} = 1, x = k$$

รอยตัดบนระนาบ $y = k$ คือ ไฮเพอร์โบลา

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{k^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{k^2}{b^2}\right)} = 1, y = k$$

รอยตัดบนระนาบ $z = k$ คือ วงรี

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1, z = k$$

สมมาตรโดยแกน X, Y, Z ระนาบ xy, xz, yz และจุดกำเนิด

ตัวอย่าง 1.3.3 จงหาค่าตัดแกน รอยตัดบนระนาบพิกัด รอยตัดบนระนาบ $x = 2, y = 1, z = 2$ และ

พิจารณาการสมมาตรของพื้นผิวทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีส่วนเดียว $36x^2 + 225y^2 - 100z^2 = 900$

วิธีทำ. [ใน Sheet ๐.๑ ส่วนนี้]

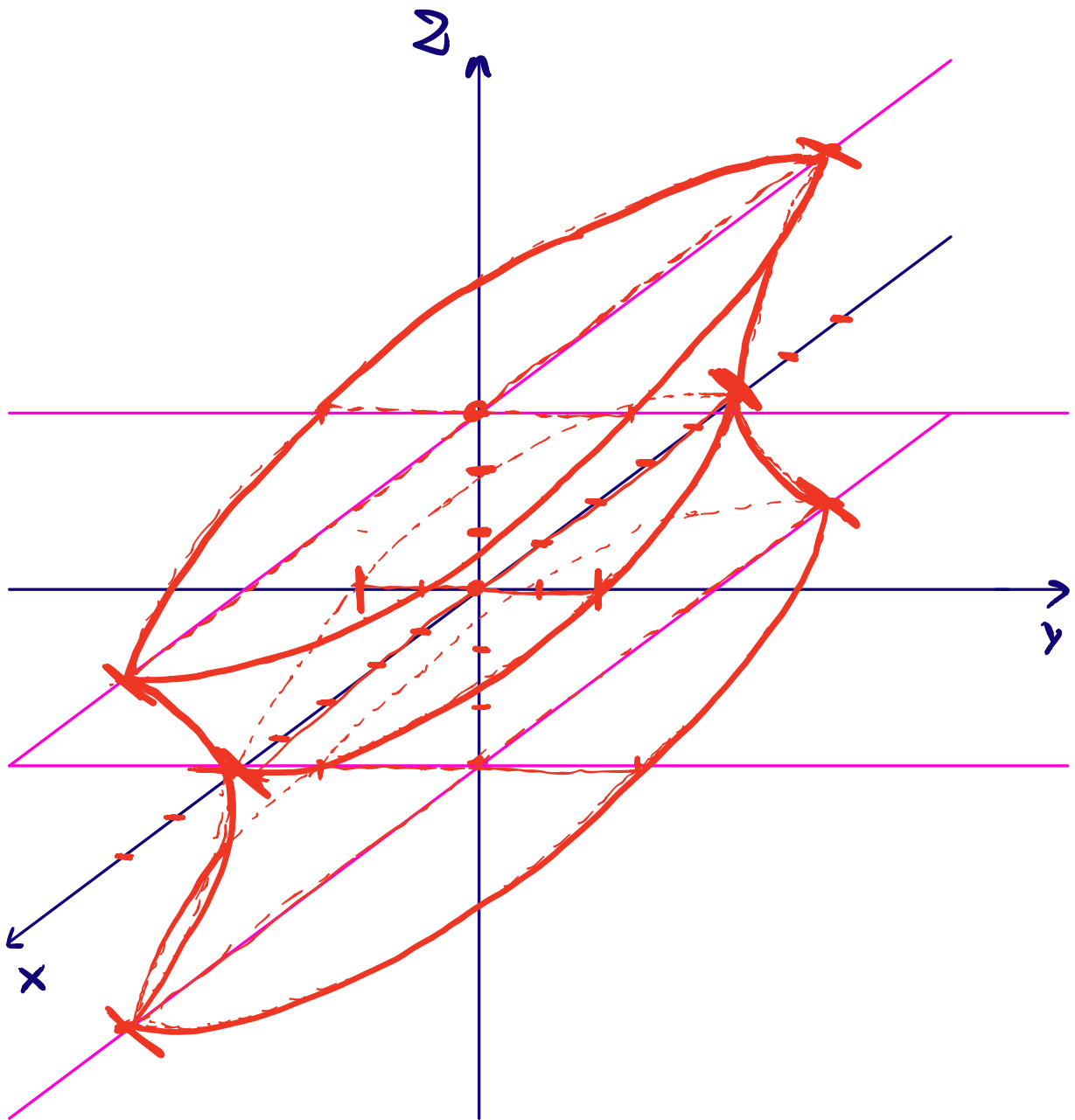
"แทนค่าตัดแกนเดิม"

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$$

- ถ้าจะวาดภาพ ให้พิจารณา
- ① วงรี ที่ หัก ดย เป็น "๐"
 - ② วงรี ที่ หัก ดย เป็น ค่า คง ตัว (k)
 - ③ เส้น วงรี โค้ง ไฮเพอร์โบลา

परिणाम $z=0 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

$z = \pm 3 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{\underbrace{(5\sqrt{2})^2}_{\approx 7}} + \frac{y^2}{\underbrace{(2\sqrt{2})^2}_{\approx 2.8}} = 1$



③ Elliptic Hyperboloid of Two Sheets.

นิยาม 1.3.4 พื้นผิวที่มีสมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว เรียกว่าทรงไฮเพอร์โบลอยด์เชิงวงรีสองส่วน (Elliptic hyperboloid of two sheet)

ค่าตัดแกน X คือ $x = \pm a$ ไม่ตัดแกน Y และไม่ตัดแกน Z

รอยตัดบนระนาบ xy คือไฮเพอร์โบลอยด์ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$

รอยตัดบนระนาบ xz คือไฮเพอร์โบลอยด์ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$

ไม่ตัดระนาบ yz

รอยตัดบนระนาบ $x = k, |k| > a$ คือวงรี $\frac{y^2}{b^2 \left(\frac{k^2}{a^2} - 1 \right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(\frac{k^2}{a^2} - 1 \right)} = 1, x = k$

รอยตัดบนระนาบ $y = k$ คือไฮเพอร์โบลอยด์ $\frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{k^2}{b^2} \right)} - \frac{z^2}{c^2 \left(1 + \frac{k^2}{b^2} \right)} = 1, y = k$

รอยตัดบนระนาบ $z = k$ คือไฮเพอร์โบลอยด์ $\frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{k^2}{c^2} \right)} - \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{k^2}{c^2} \right)} = 1, z = k$

สมมาตรโดยแกน X, Y, Z ระนาบ xy, xz, yz และจุดกำเนิด

Example: Sketch the graph of the hyperboloid of two sheets

$$z^2 - x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

วิธีทำ. กำหนดค่าคงที่!

- ① ตรวจสอบค่าคงที่ที่ต่างหาก (ในกรณี ๒)
- ② ลองใช้สมการของทรงกลมที่เหมือนกัน ($z = \pm k$)
- ① $z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$; ② $z = \pm \sqrt{2} \Rightarrow z^2 - x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$
($x=y=0$)
- ③ ใช้จุดตัดของวงรี

