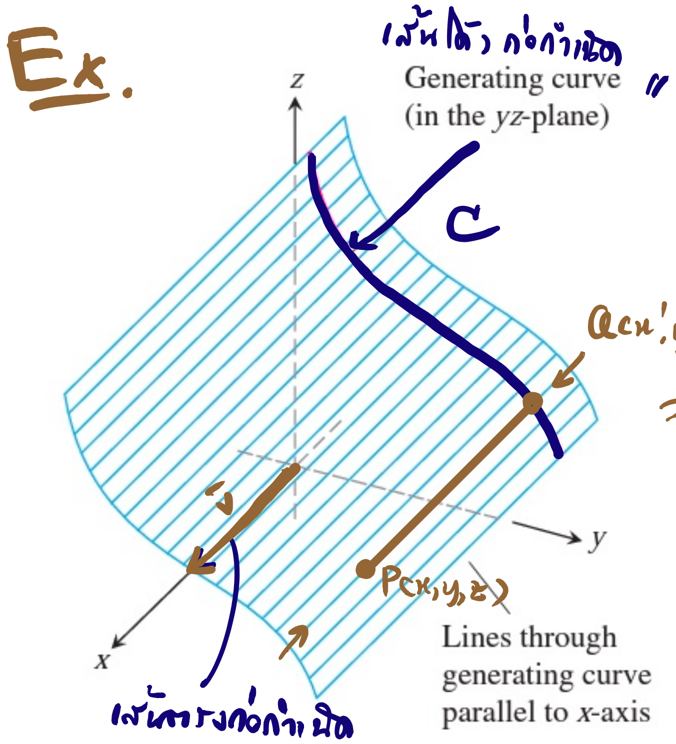
ทบทวน! Ex. จงหาสมการของทรงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1,1,13)$ และสัมผัสกับระนาบ $4x+3y+12z-59=0$

② ทรงกระบอก (Cylinder)

Ex.



ให้ C เป็นเส้นโค้งก่อกำเนิดของทรงกระบอก และให้ $\vec{v} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นตรงก่อกำเนิด

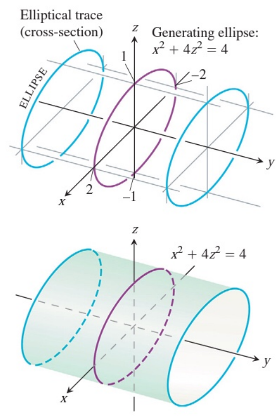


FIGURE 12.46 The elliptical cylinder $x^2 + 4z^2 = 4$ is made of lines parallel to the y-axis and passing through the ellipse $x^2 + 4z^2 = 4$ in the xz-plane. The cross-sections or "traces" of the cylinder in planes perpendicular to the y-axis are ellipses congruent to the generating ellipse. The cylinder extends along the entire y-axis.

หลักการหาสมการทรงกระบอก :

① ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใดๆ บนทรงกระบอก

② Use! "เนื่องจากเส้นตรงก่อกำเนิดที่ผ่าน $P(x,y,z)$ นี้จะตัดกับเส้นโค้งก่อกำเนิด C ที่จุด $Q(x',y',z')$ (บางจุดบนเส้นโค้งเสมอ)

โดยที่ $\vec{PQ} \parallel \vec{v}$" [$\exists m \in \mathbb{R}$ s.t. $\vec{PQ} = m\vec{v}$]

③ **Use!** จุด $Q(x', y', z')$ อยู่บนเส้นโค้งก่อกำเนิด C

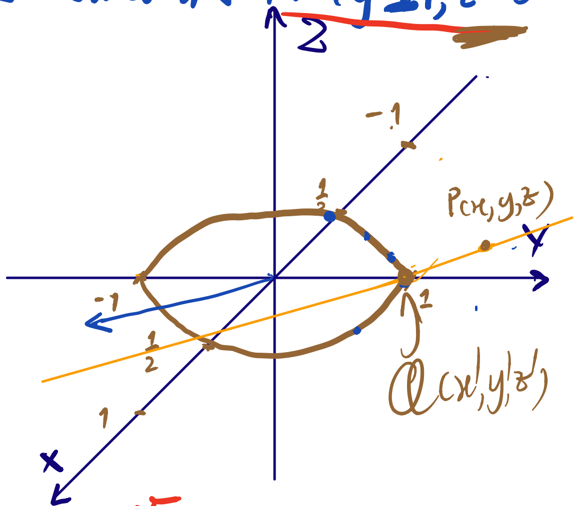
Ex. จงหาสมการของทรงกระบอกซึ่งเกิดจากเส้นตรงซึ่งขนานกับเวกเตอร์ $\bar{v} = 3i - j + k$ เคลื่อนไปตามเส้นโค้ง $4x^2 + y^2 = 1, z = 0$

$(3, -1, 1)$

พิจารณา $4x^2 + y^2 = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{4}\right)} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$

b $\quad$ a



Let!

① ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใดๆ บนทรงกระบอกนี้

② **Use!** "เส้นตรงก่อกำเนิดที่ผ่าน $P(x, y, z)$ จะตัดกับเส้นโค้งก่อกำเนิดที่มีจุด $Q(x', y', z')$ เสมอ โดยที่ $\vec{PQ} \parallel \vec{v}$"

2.1 ให้ $Q(x', y', z')$ เป็นจุดบนเส้นโค้งก่อกำเนิดที่เส้นตรงก่อกำเนิดซึ่งผ่าน $P(x, y, z)$ จะได้ว่า $\vec{PQ} \parallel \vec{v}$ นั่นคือ จะมีจำนวนจริง m ที่ทำให้ $\vec{PQ} = m\vec{v}$ $\quad$ (2.2)

จะพยายามเขียน x', y', z' ในรูปของ x, y, z

$$\Rightarrow (x, y, z) - (x', y', z') = m(3, -1, 1)$$

$$\Rightarrow (x - x', y - y', z - z') = m(3, -1, 1)$$

$$\Rightarrow x - x' = 3m, \quad y - y' = -m \quad \text{และ} \quad z - z' = m$$

[เนื่องจาก $Q(x', y', z')$ อยู่บนเส้นโค้งก่อกำเนิด จะได้ว่า $z' = 0$]

$$\Rightarrow x' = x - 3m, \quad y' = y + m \quad \text{และ} \quad z - 0 = m$$

$\boxed{m = z}$

$\Rightarrow \boxed{x' = x - 3z}, \boxed{y' = y + z}$ และ $\boxed{z' = 0}$ ← (2.3)

③ "แทนค่า x', y', z' ในสมการเส้นโค้งกำเนิด"

เนื่องจาก $Q(x', y', z')$ อยู่บนเส้นโค้งกำเนิด $4x^2 + y^2 = 1, z = 0$

เราจะได้ว่า

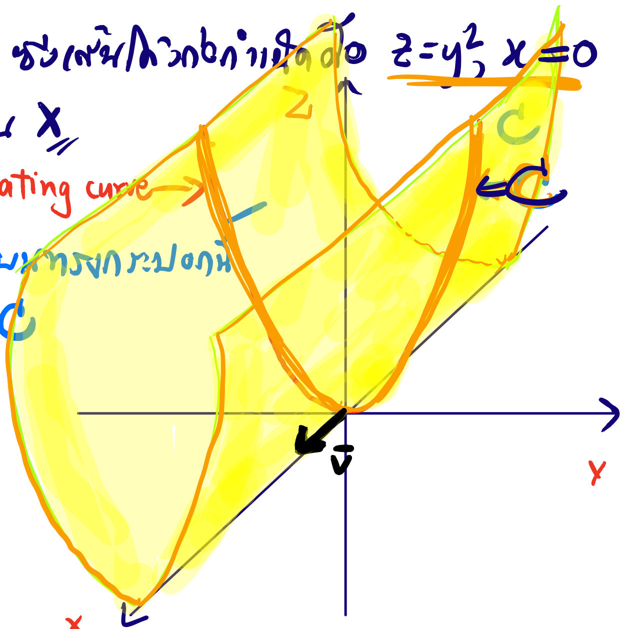
$$4(x')^2 + (y')^2 = 1 \Rightarrow 4(x-3z)^2 + (y+z)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 4x^2 + y^2 + 37z^2 - 24xz + 2yz = 1$$

ดังนั้นสมการของทรงกระบอก คือ $4x^2 + y^2 + 37z^2 - 24xz + 2yz = 1$ ∎

Ex จงหาสมการของทรงกระบอก ซึ่งเส้นโค้งกำเนิด คือ $z = y^2, x = 0$ และเส้นตรงกำเนิดขนานกับแกน X

$(\bar{v} = i + 0j + 0k)$



สมมติให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใดๆ บนทรงกระบอกนี้

และให้ $Q(x', y', z')$ เป็นจุดบน C

เราจะได้ว่า $\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{v}$

นั่นคือ มีจำนวนจริง m ที่ทำให้

$$\overrightarrow{PQ} = m\vec{v}$$

$\Rightarrow (x - x', y - y', z - z') = m(1, 0, 0)$

$\Rightarrow x - x' = m, \; y - y' = 0, \; z - z' = 0$

[เนื่องจาก $(x', y', z') \in C$]

$\Rightarrow x - 0 = m, \; \boxed{y' = y}$ และ $\boxed{z' = z}$

$\Rightarrow \boxed{x = m}, \; \boxed{y' = y}$ และ $\boxed{z' = z}$

③ แทนค่า (x',y',z') ใน C

เนื่องจาก $y'=y$ และ $z'=z$ จะได้

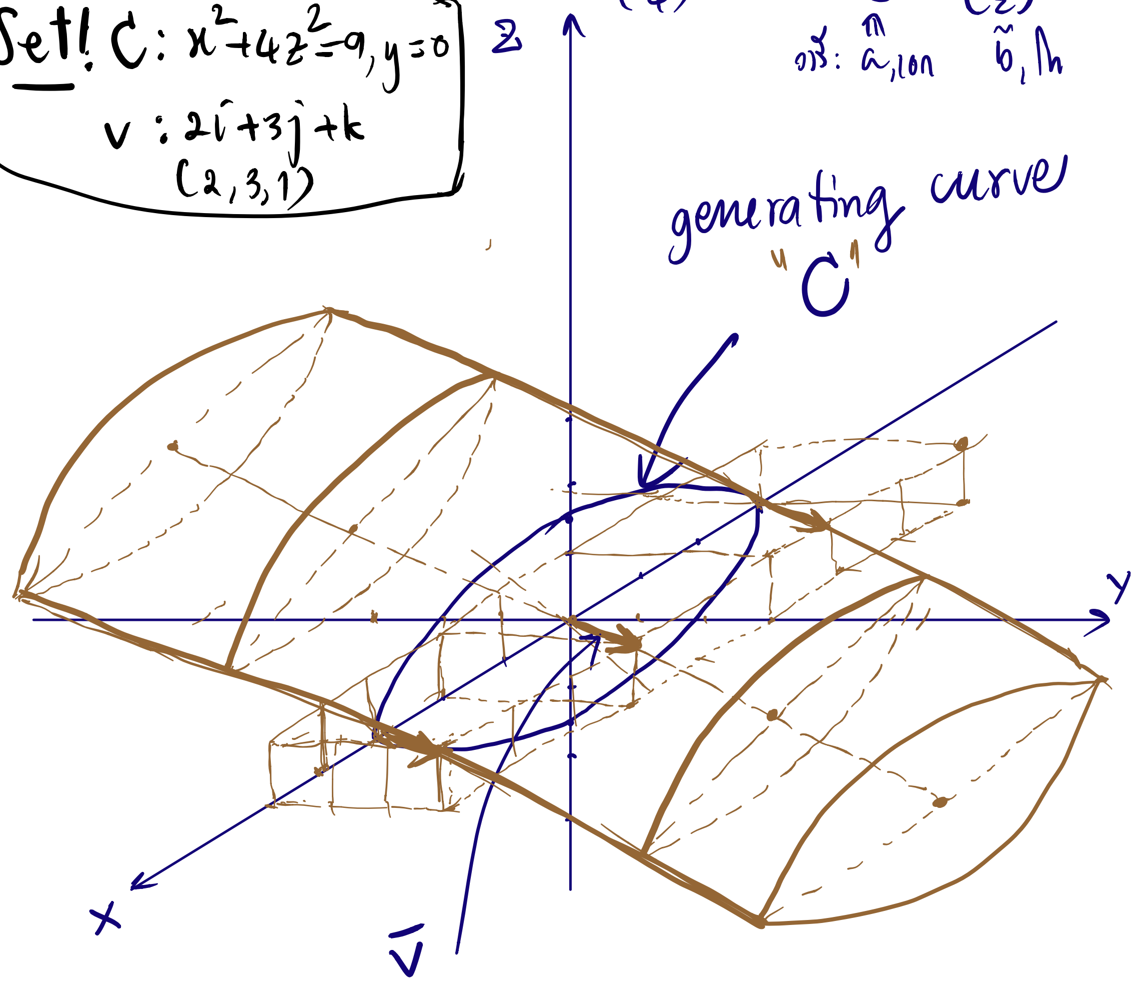
$$(z') = (y')^2 \Rightarrow z = y^2$$

Ex. จงหาสมการของทรงกระบอกซึ่งเกิดจากเส้นตรงซึ่งขนานกับเวกเตอร์ $v = 2i+3j+k$ เคลื่อนไปตามเส้นโค้ง $x^2+4z^2=9, y=0$.

วิธีทำ. $x^2+4z^2=9 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{\left(\frac{9}{4}\right)} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$

วงรี: a, เอก b, โท

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Set! } C: x^2+4z^2=9, y=0 \\ v: 2i+3j+k \\ (2,3,1)\end{array}}$$



วิธีทำ ① ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใดๆ บนทรงกระบอกนี้

② ให้ $Q(x', y', z')$ เป็นจุดบน C

เราจะได้ว่า

$$\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{v}$$

นั่นคือ จะมี $m \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$$\overrightarrow{PQ} = m\vec{v}$$

$$\Rightarrow (x-x', y-y', t-z') = m(2,3,1)$$

$\Rightarrow x-x' = 2m,\ y-y' = 3m$ และ $z-z' = m$

[เนื่องจาก $(x', y', z') \in C \Rightarrow y' = 0$]

$\Rightarrow x' = x-2m,\ y-0 = 3m$ และ $z' = z-m$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m = \frac{y}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x' = x - \frac{2y}{3}} \qquad \boxed{z' = z - \frac{y}{3}}$$

③ เนื่องจาก $(x', y', z') \in C$ จึงได้ว่า

$$(x')^2 + 4(z')^2 = 9$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{2y}{3}\right)^2 + 4\left(z - \frac{y}{3}\right)^2 = 9$$

∎

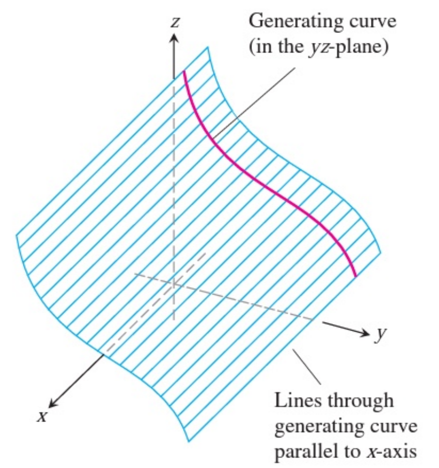


FIGURE 12.43 A cylinder and generating curve.

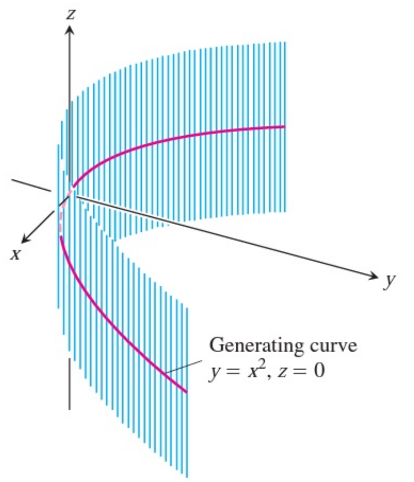


FIGURE 12.44 The cylinder of lines passing through the parabola $y = x^2$ in the xy-plane parallel to the z-axis

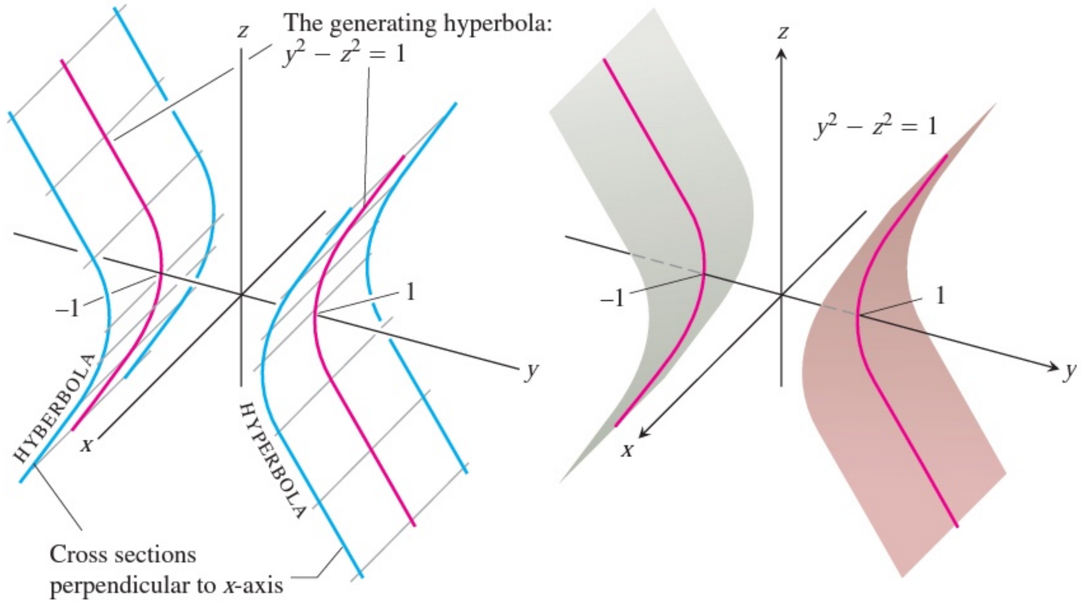


FIGURE 12.47 The hyperbolic cylinder $y^2 - z^2 = 1$ is made of lines parallel to the x-axis and passing through the hyperbola $y^2 - z^2 = 1$ in the yz-plane. The cross-sections of the cylinder in planes perpendicular to the x-axis are hyperbolas congruent to the generating hyperbola.

DRAWING LESSON

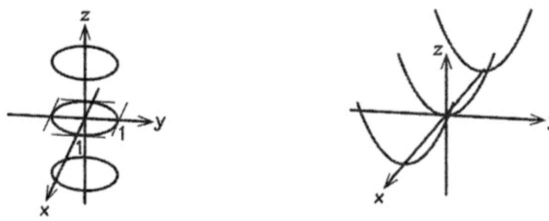
How to Draw Cylinders Parallel to the Coordinate Axes

$x^2 + y^2 = 1$ $\qquad\qquad$ $z = y^2$

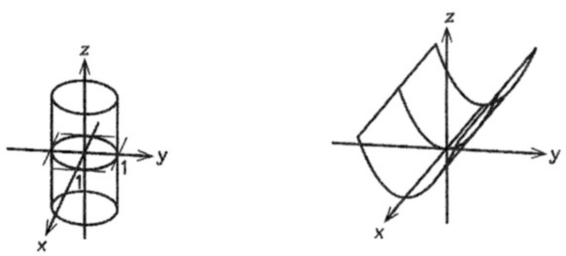
1 Sketch all three coordinate axes *very lightly.*

2 Sketch the trace of the cylinder in the coordinate plane of the two variables that appear in the cylinder's equation. Sketch *very lightly.*

3 Sketch traces in parallel planes on either side (again, *lightly*).



4 Add parallel outer edges to give the shape definition.



5 If more definition is required, darken the parts of the lines that are exposed to view. Leave the hidden parts light. Use line breaks when you can.